Mécanique du point

CHAPITRE 1

Cinématique du point et du solide

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction (1)

La cinématique s'intéresse à la description du mouvement d'un corps physique indépendamment de ses causes, alors que la dynamique (objet du prochain chapitre), le pilier de la mécanique, a pour objet l'étude des **causes de la modification du mouvement**.

Pour résumer, on peut noter :

$$\boxed{\text{Mécanique} = \text{Cinématique} + \text{Dynamique}}$$

Introduction (2)

L'objectif est donc de :

- donner les bases du repérage d'un point dans l'espace
- définir les principaux systèmes de coordonnées
- définir les vecteurs position, vitesse et accélération
- savoir projeter ces vecteurs dans différents repères
- maitriser l'étude des mouvements simples

Point Matériel (1)

LE POINT MATERIEL OU PARTICULE: Un point matériel est un **modèle commode** pour représenter un corps physique réel. **Ce modèle est valable si les dimensions du corps physique sont faibles par rapport à la distance d'observation** (de celui qui observe le mouvement). Par exemple, la navette spatiale peut-être assimilée à un point matériel pour un observateur terrestre mais pas pour son commandant de bord. En effet pour ce dernier, la navette a des dimensions spatiales, elle peut tourner sur elle-même etc…

Point Matériel (2)

Décrivons de façon plus précise un point matériel :

- Il s'agit d'un objet **sans dimension**, **sans forme** (un point au sens des mathématiques).
- Le mouvement d'un point matériel se déroule dans l'espace et dans le temps. La connaissance de ce mouvement nécessite la connaissance de **trois coordonnées** (x, y, z ou r , θ, z …) dépendant du **paramètre temps**.
- Un point matériel est caractérisé par **sa masse** notée m . Il s'agit d'une grandeur scalaire (un nombre pur) dont l'unité est le kilogramme (kg). La masse est une grandeur invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel d'étude.

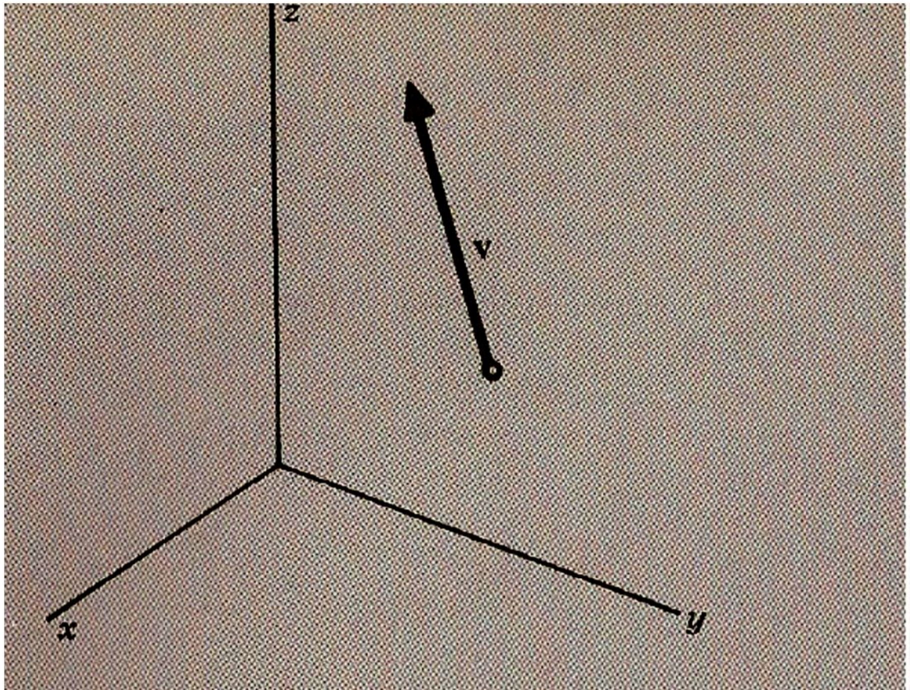
Solide Indéformable (1)

Nous allons supposé dans ce cours que les solides, **corps physiques massiques constitués d'atomes et de molécules, sont indéformables**. Dans ce cas, tous les points du solides garderont des distances respectives inchangées au cours du temps. Il s'agit d'un modèle idéalisé, qui est très pertinent dans de nombreux cas. Cependant, les ingénieurs et les scientifiques savent que les matériaux, même solide, se déforment et il faut en tenir compte, notamment dans la construction des infrastructures. Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut 6 coordonnées :

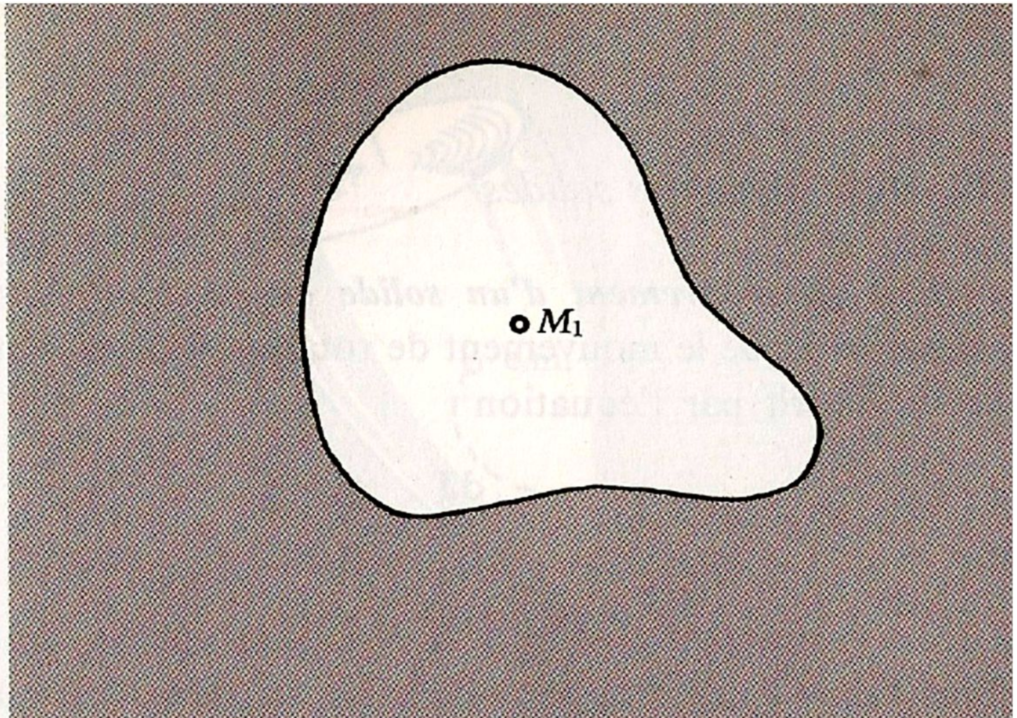
Solide Indéformable (2)

3 pour indiquer la position de son centre de masse et 3 supplémentaires pour indiquer l'orientation spatiale du solide par rapport au centre de masse (cf. figure ci-dessous). Dans notre programme, nous allons simplement étudier **des solides en mouvement de translation ou en rotation autour d'un axe fixe**. Le mouvement le plus général du solide est une combinaison de ces deux mouvement et peu s'avérer difficile à étudier (vous verrez peut-être cela en école d'ingénieur).

Solide Indéformable (3)

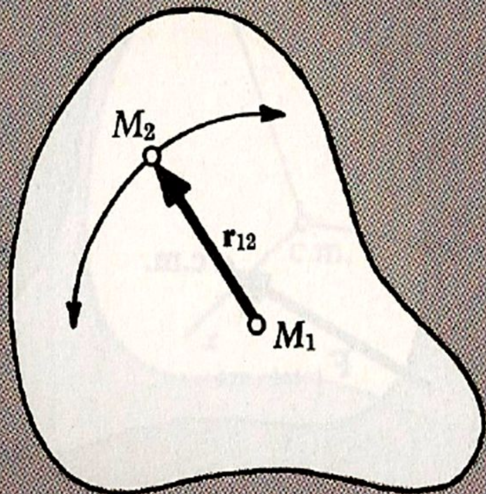


Une particule qui se déplace sans contrainte a trois degrés de liberté ($f = 3$).

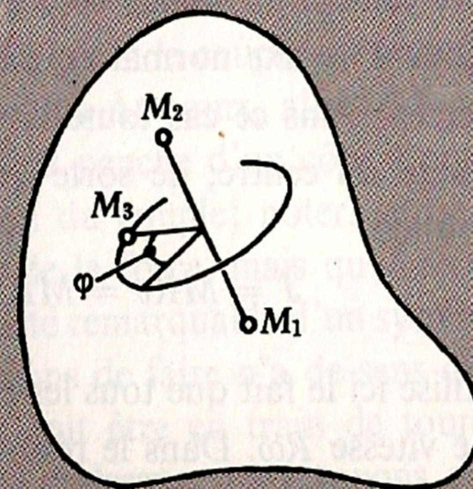


Supposons que nous choisissions une particule M_1 dans le corps. Elle a trois degrés de liberté.

Solide Indéformable (4)

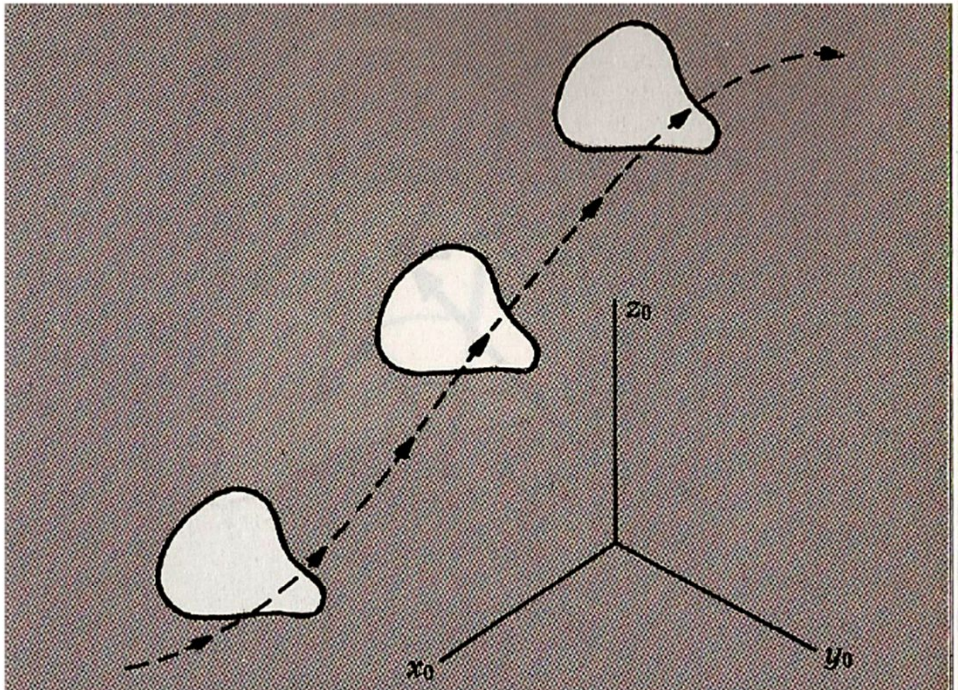


Une fois qu'on a choisi un repère dans lequel M_1 est fixe, M_2 n'a plus que deux degrés de liberté, car il doit se déplacer sur la surface d'une sphère de rayon $\mathbf{r}_{12}$.

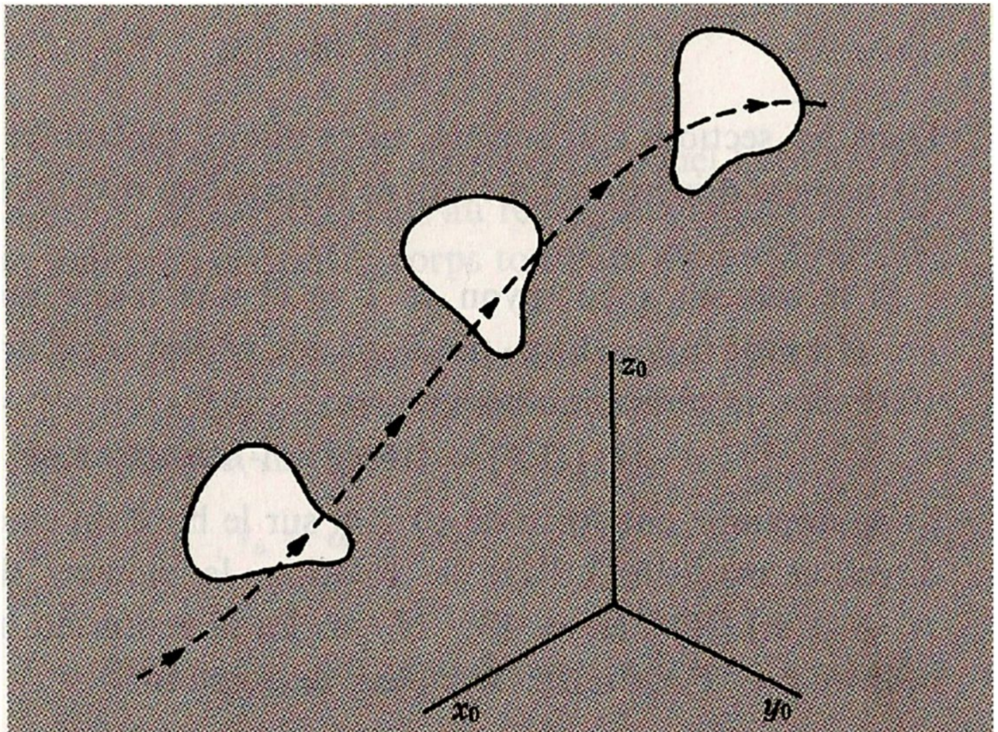


Une fois qu'on a choisi un repère dans lequel M_1 et M_2 sont fixes, tout autre particule dans le corps n'a qu'un degré de liberté, car elle doit se déplacer sur le cercle indiqué. Ainsi $f = 6$ pour un corps solide.

Solide Indéformable (5)



Autre façon de voir cela : Notre corps rigide peut être translaté sans tourner par rapport à un repère d'inertie ($x_0y_0z_0$). Il y a trois degrés de liberté de translation.



En plus il peut tourner. Il y a trois degrés de liberté de rotation, de sorte que $f = 3 + 3 = 6$.

Les types de mécanique (1)

Le tableau ci-dessous illustre **les quatre « royaumes » de la mécanique.**

PETIT

Mécanique classique (Newton)	**Mécanique quantique** (Bohr, Heisenberg, Shrödinger, *et al.*)
Mécanique relativiste (Einstein)	**Théorie quantique des champs** (Dirac, Pauli, Feynman, Schwinger, Tomonaga, *et al.*)

RAPIDE

Les types de mécanique (2)

La mécanique classique (ou mécanique Newtonienne) s'est révélée incomplète au début du XXème siècle. Elle fonctionne très bien pour décrire les phénomènes de la vie « quotidienne » mais pour des objets à très grande vitesse (proche de celle de la lumière), elle est incorrecte et doit être remplacée par **la mécanique relativiste** (restreinte et/ou générale). Pour des objets extrêmement petits, elle ne fonctionne pas non plus (pour diverses raisons) et doit être remplacée **par la mécanique quantique.**

Les types de mécanique (3)

Pour décrire des objets à la fois rapides et petits (comme c'est le cas dans l'étude des particules élémentaires), il faut une mécanique à la fois relativiste et quantique : c'est la mécanique quantique relativiste ou, de façon plus correcte, la **théorie quantique des champs** (élaborée dans les années 1930-50). Même cette dernière mécanique n'est pas complètement satisfaisante à l'heure actuellement (les expériences qui auront lieu au CERN, grâce au LHC, dans les prochaines décennies, permettront sans doute de compléter les choses).

4 forces fondamentales (1)

La mécanique nous informe de la façon dont va se comporter un système quand ce dernier est soumis à une force. Dans la nature, nous connaissons (actuellement) seulement **quatre forces fondamentales** (on parle aussi d'interactions) :

1 – Forte

2 – Electromagnétique

3 – Faible

4 – Gravitationnelle

4 forces fondamentales (2)

- Dans la vie de tous les jours, à l'exception notable de la gravité qui nous cloue au sol, toutes les forces que nous rencontrons sont d'origine **électromagnétique.**
- **La force forte** qui lie les protons et les neutrons ensemble dans le noyau atomique est à très faible portée et nous ne la ressentons pas, même si elle est une centaine de fois plus intense que la force électromagnétique.
- **La force faible** est responsable de certains processus radioactifs dans les noyaux. Elle n'est pas seulement à courte portée, elle est aussi beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétique.

4 forces fondamentales (3)

- **la force de gravité** est de loin la plus faible de toutes et c'est seulement à cause de concentrations énormes de masses (comme la terre, le soleil) que nous percevons ses effets. La force de répulsion électrostatique entre deux électrons est 10^{42} fois plus intense que la force d'attraction gravitationnelle. Si les atomes étaient liés par la force de gravité et non par la force électromagnétique, un simple atome d'hydrogène serait plus large que l'univers connu !

Repère d’espace et référentiel

Repère d'espace (1)

Un **repère d'espace** est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. **Les 3 axes forment un trièdre direct**. L'étude du mouvement dans un plan nécessite deux axes (Ox, Oy). Dans l'espace 3 axes (Ox, Oy, Oz). À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. **Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée**.

Repère d'espace (2)

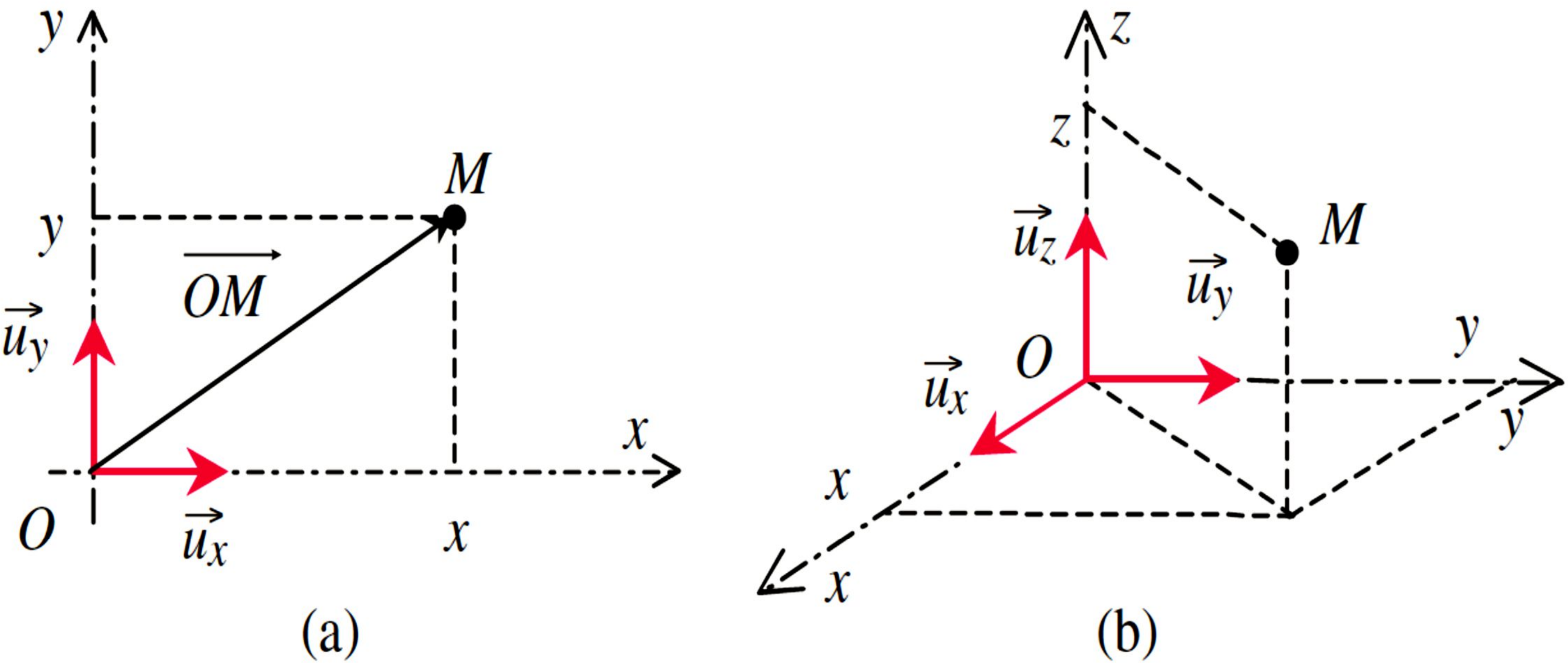
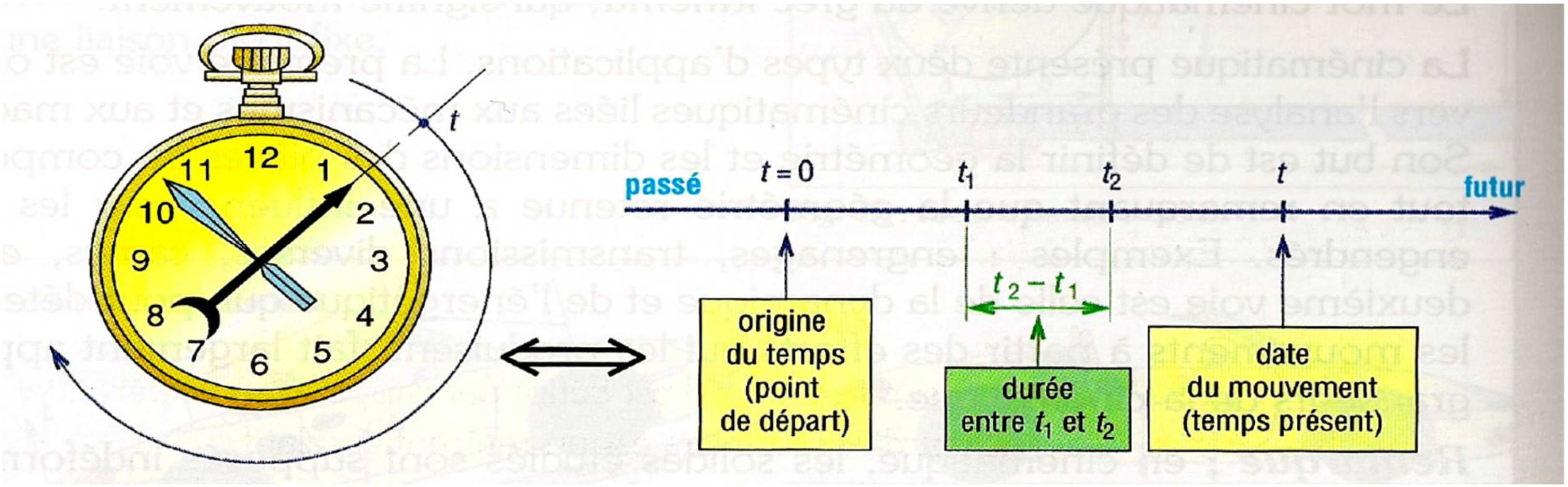


Figure 1.3 Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

Repère de temps

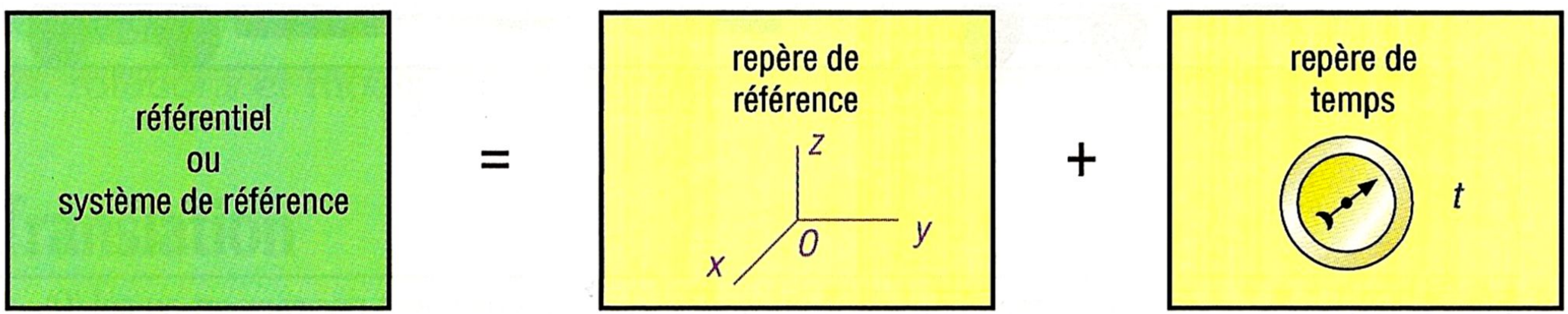
Pour pouvoir répondre à la question QUAND? Il faut ajouter un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable du temps. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie. À chaque instant on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.



Référentiel (1)

Un ensemble formé d'un repère d'espace et d'un repère de temps (un ensemble d'horloges synchronisées) constitue un **référentiel**, c'est–à-dire une référence spatiale et une référence temporelle, toutes deux indispensables dans l'étude de tout mouvement.

Référentiel = Repère d'espace + Repère de temps



Référentiel (2)

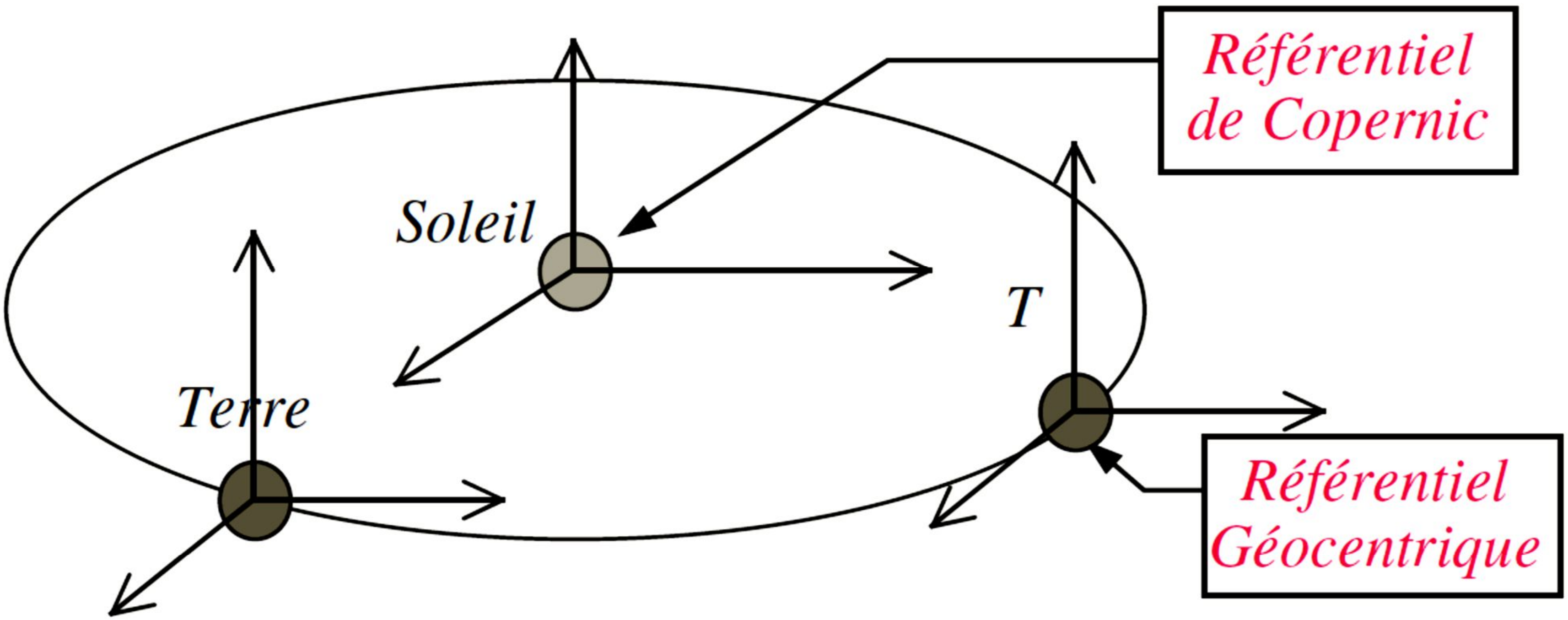


Figure 1.2 Les référentiels de Copernic et géocentrique : le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

Systèmes de coordonnées

Introduction

On exprime la position d'un objet par rapport à un système de coordonnées qui est constitué d'un **ensemble de trois axes** dont chacun correspond à une **direction de l'espace** et qui est considéré comme **fixe** par rapport à un repère d'espace. On dit que le système de coordonnées est lié au repère. Dans la suite, nous allons utiliser les systèmes de coordonnées suivants :

⇒ Cartésien

⇒ Polaire (cylindrique à 2D)

⇒ Cylindrique

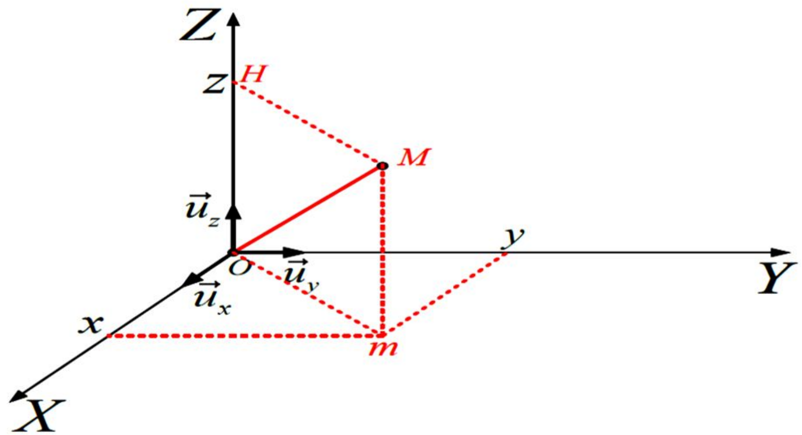
⇒ Sphérique

Coordonnées cartésiennes (x, y, z) (1)

➢ Coordonnées

$$\begin{cases} x = & abscisse \\ y = & ordonnée \\ z = & côte \end{cases}$$

➢ Représentation



Pour représenter ce système de coordonnées, on marque d'abord le point matériel M.Ensuite on projette ce point M sur l'axe OZ : on obtient alors le point H de coordonnée z sur l'axe OZ. On projette M orthogonalement dans le plan(OX, OY) en traçant une parallèle à l'axe OZ passant par M : on obtient alors le point m. On trace alors les droites passant par m et parallèles aux axes OX et OY : les intersections de ces droites avec les axes OX et OY donnent les coordonnées x et y du point M.

Coordonnées cartésiennes (x, y, z) (2)

➢ Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Am} + \overrightarrow{mM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

➢ Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

➢ Volume élémentaire

$$dV = dx\,dy\,dz$$

Remarque : *le repère cartésien associé au point M est un repère fixe par conséquent* **$(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ *est une base fixe***. *Ces vecteurs gardent la même norme unitaire, la même direction et le même sens au cours du temps.*

Coordonnées cartésiennes (x, y, z) (3)

$\overrightarrow{OM}$	$d\overrightarrow{OM}$	ds	$\vec{u}$	dV
x	dx	$dydz$	$\vec{u}_x$	
y	dy	$dzdx$	$\vec{u}_y$	$dx\,dy\,dz$
z	dz	$dxdy$	$\vec{u}_z$	

Coordonnées polaires (ρ, θ)(1)

Le système de coordonnées polaires est utilisé dans le cas où le point ***M* est mobile dans un plan**. Le point M est parfaitement repéré si on connait la distance $OM = \rho$ et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox.

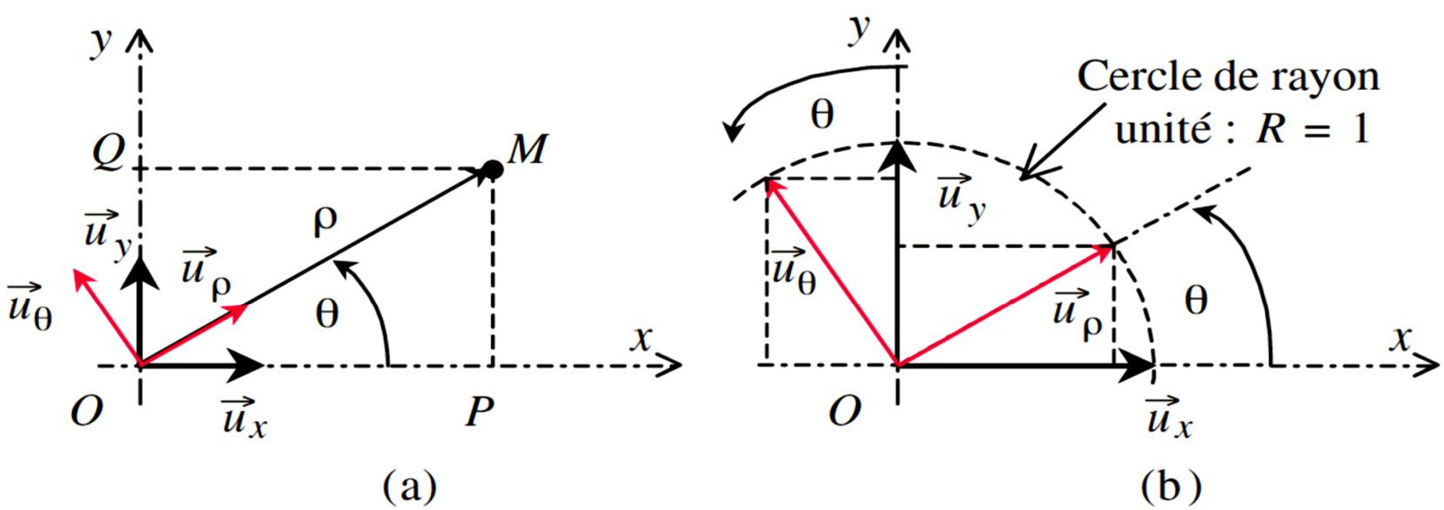


Figure 1.5 Les coordonnées polaires (ρ,θ) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

Coordonnées polaires (ρ, θ)(2)

➢ Vecteurs unitaires

✓ $\vec{u}_\rho$: vecteur unitaire suivant la direction et le sens de O vers M. C'est le vecteur radial (suivant le rayon).

✓ $\vec{u}_\theta$: vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\rho$. Il est obtenu en faisant une rotation de $+\pi/2$ à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$. C'est le vecteur orthoradial (perpendiculaire au rayon)

➢ Coordonnées

Le point O correspond au pôle d'où le terme coordonné polaire $\begin{cases} \rho = & \textit{coordonnée radiale} \\ \theta = & \textit{coordonnée angulaire ou angle polaire} \end{cases}$

Coordonnées polaires (ρ, θ)(3)

- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|\vec{u}_\rho = \rho\vec{u}_\rho$

  M n'a pas de composantes suivant $\vec{u}_\theta$

- **Déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta$$

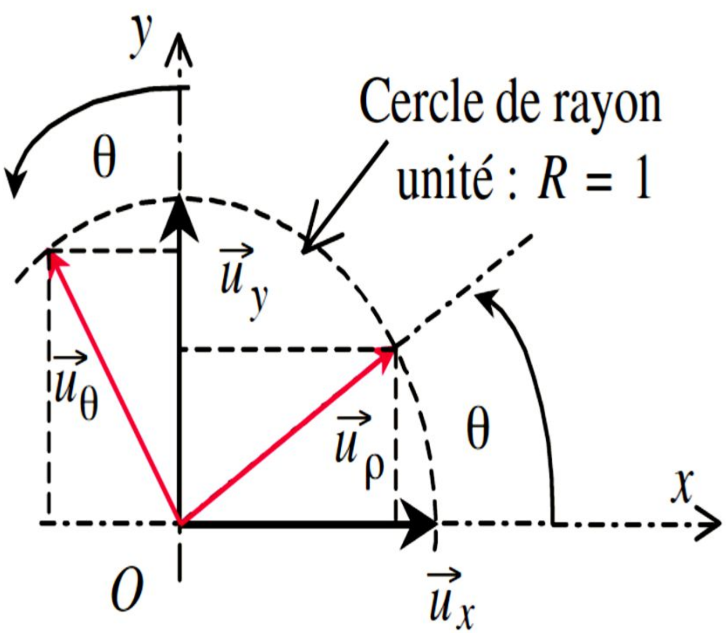
- **Lien entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes**

$$\cos\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Longrightarrow x = \rho\cos\theta \qquad \sin\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{\rho} \Longrightarrow y = \rho\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \qquad OM = \rho = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Coordonnées polaires (ρ, θ)(4)

➢ Passage d'une base d'un système de coordonnées à l'autre



- ✓ Les composantes des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne sont :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{cases}}$$

- ✓ Les composantes des vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ dans la base polaire sont :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_x = \cos\theta\,\vec{u}_\rho - \sin\theta\,\vec{u}_\theta \\ \vec{u}_y = \sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_\theta \end{cases}}$$

Coordonnées polaires (ρ, θ)(5)

✓ Un moyen simple de retrouver rapidement les composantes d'un vecteur sur une base est d'utiliser les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

- Composantes de $\vec{u}_\rho$ sur $\vec{u}_x$:$\vec{u}_\rho.\vec{u}_x = \left\|\vec{u}_\rho\right\| \|\vec{u}_x\| \cos\theta = \cos\theta$
- Composantes de $\vec{u}_\rho$ sur $\vec{u}_y$:

$$\vec{u}_\rho.\vec{u}_y = \left\|\vec{u}_\rho\right\| \left\|\vec{u}_y\right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

On retrouve ainsi la relation : $\vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$

<u>**Remarque**</u> : **La base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires est dite mobile**. Au cours du déplacement du point M dans le plan, le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ suivant OM change de direction ainsi que $\vec{u}_\theta$.

Coordonnées cylindriques (ρ, θ,z) (1)

Il suffit de compléter le système de coordonnés polaires par un troisième axe : l'axe Oz

➢ Coordonnées

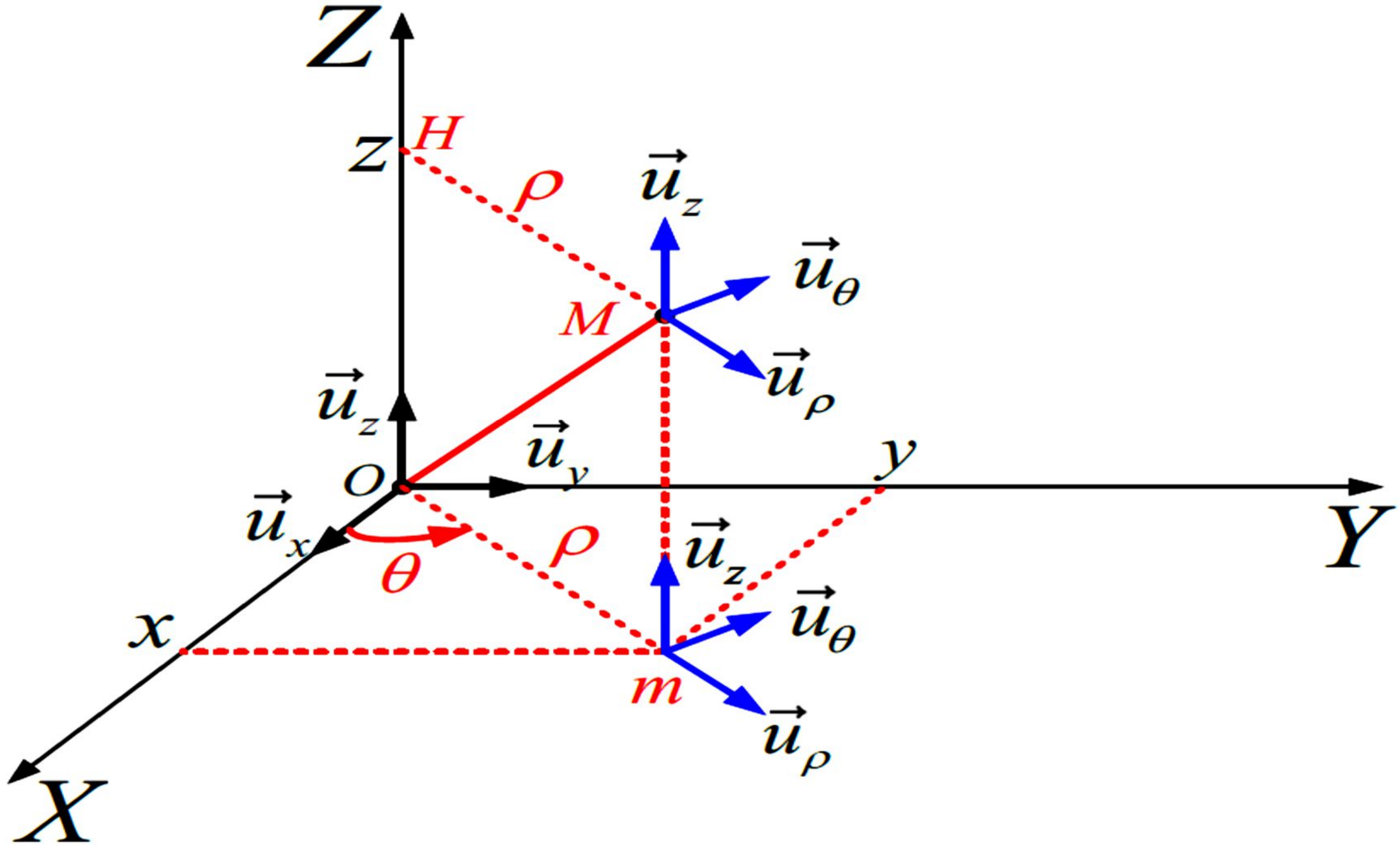
$$\begin{cases} \rho = \text{rayon polaire} & \rho \in [0\,;+\infty[\\ \theta = \text{angle polaire} & \theta \in [0; 2\pi] \\ z = \text{côte} & z \in]-\infty\,;+\infty[\end{cases}$$

➢ Représentation

Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes on note H et m les projections orthogonales du point M sur l'axe OZ et le plan (OX, OZ) respectivement. Le point H a pour côté z qui est la coordonnée de M suivant l'axe OZ.

Coordonnées cylindriques (ρ, θ,z) (2)

On note $Om = \rho$ et l'angle entre l'axe OX et Om est appelé θ.



Coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (3)

- **Vecteurs unitaires**

✓ $\vec{u}_\rho = \overrightarrow{Om}/\rho$: dans le plan (OX, OY) ; $\vec{u}_\rho$ est appelé vecteur radial.

✓ $\vec{u}_\theta$ est obtenu en faisant une rotation de $+\pi/2$ dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$ dans le plan (OX, OY). $\vec{u}_\theta$ est appelé vecteur orthoradial.

✓ $\vec{u}_z$: est le vecteur directeur de l'axe OZ identique à celui du repère associé aux coordonnées cartésiennes.

- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$

  M n'a pas de composantes selon $\vec{u}_\theta$

- **Déplacement élémentaire :** $d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$

Coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (4)

➢ **Relation avec les coordonnées cartésiennes**

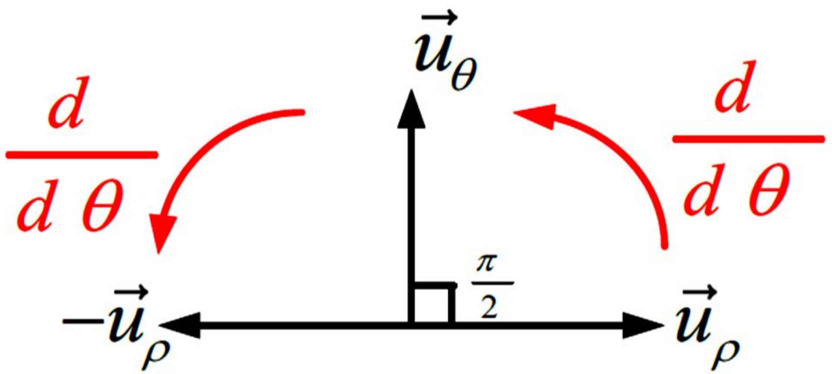
$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

➢ **Volume élémentaire**

$$dV = \rho d\rho \, d\theta \, dz$$

➢ **Dérivée des vecteurs par rapport à l'angle θ**

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho \end{cases}$$



<u>Remarque</u> : **la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est une base mobile**. Elle se déplace avec la position de M tandis que la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base fixe.

Coordonnées cylindriques (ρ, θ,z) (5)

$\overrightarrow{OM}$	$d\overrightarrow{OM}$	ds	$\vec{u}$	dV
ρ	$d\rho$	$\rho d\theta dz$	$\vec{u}_\rho$	
θ	$\rho d\theta$	$dzd\rho$	$\vec{u}_\theta$	$\rho d\rho\, d\theta\, dz$
z	dz	$\rho d\rho d\theta$	$\vec{u}_z$	

Coordonnées sphériques (r, θ,φ) (1)

➢ Coordonnées

$$\begin{cases} r = \text{rayon vecteur} & r \in [0\,;+\infty[\\ \theta = \text{colatitude} & \theta \in [0;\pi] \\ \varphi = \text{longitude} & \varphi \in [0\,;2\pi] \end{cases}$$

➢ Représentation

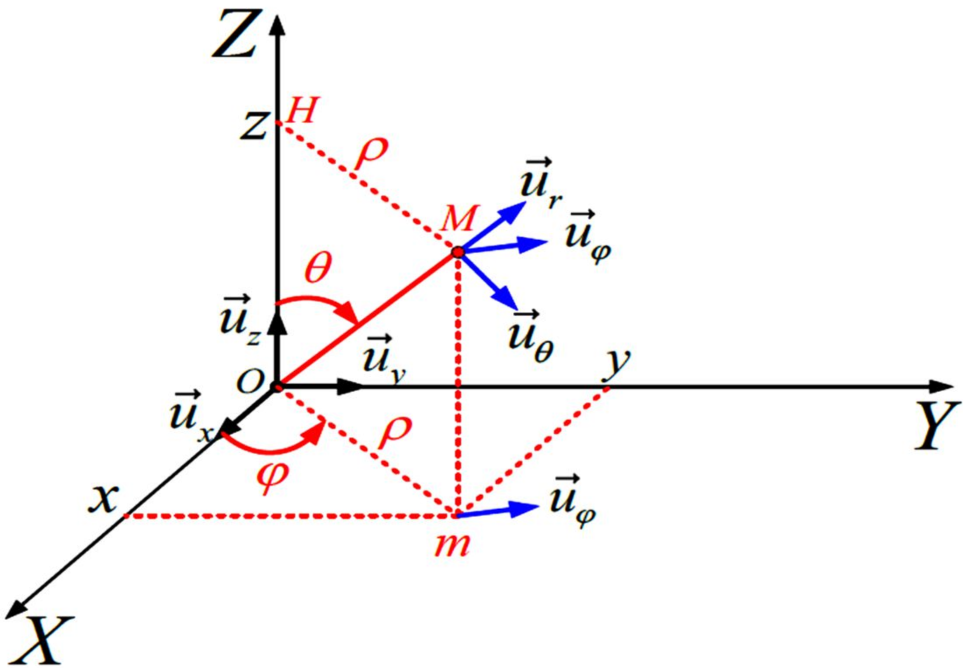
Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes on note H et m les projections orthogonales du point M sur l'axe OZ et le plan (OX, OZ) respectivement. Le point H a pour côté z qui est la coordonnée de M suivant l'axe OZ.

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) (2)

✓ la distance entre O et M est notée r, soit $r = OM$

✓ l'angle entre l'axe OZ et le vecteur OM est noté θ est appelé colatitude.

✓ l'angle entre l'axe OX et Om est noté φ et est appelé **longitude**.



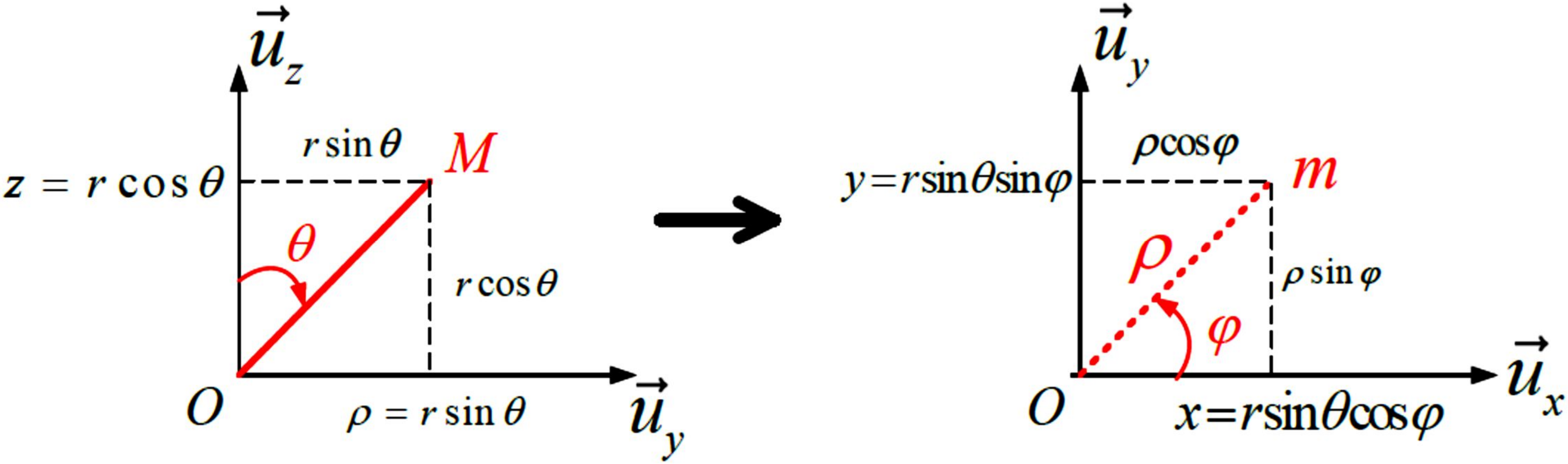
➢ **Vecteur position**

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

***M* n'a qu'une coordonnée car la base sphérique est mobile**. Les 2 autres coordonnées apparaissent dans le positionnement de la base mobile par rapport à la base fixe.

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) (3)

➢ Relation avec les coordonnées cartésiennes



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) (5)

- **Passage de la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ à la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$**

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z \Longrightarrow \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

$$\boxed{\boxed{\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z}}$$

$$\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$$

$$\boxed{\boxed{\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{u}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y - \sin\theta\vec{u}_z}}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \Longrightarrow \boxed{\boxed{\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y}}$$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) (6)

On montre également que :

$$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} = -\sin\theta \sin\varphi\, \vec{u}_x + sin\theta cos\varphi\, \vec{u}_y$$

$$= sin\theta\left(-\sin\varphi\, \vec{u}_x + cos\varphi\vec{u}_y\right) = sin\theta\vec{u}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi}}$$

➢ **Déplacement élémentaire**

$$d\overrightarrow{OM} = dr\, \vec{u}_r + rd\theta\, \vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\, \vec{u}_\varphi$$

➢ **Volume élémentaire**

$$dV = dr\, rd\theta\, rsin\theta d\varphi = r^2 dr\, sin\theta d\theta\, d\varphi$$

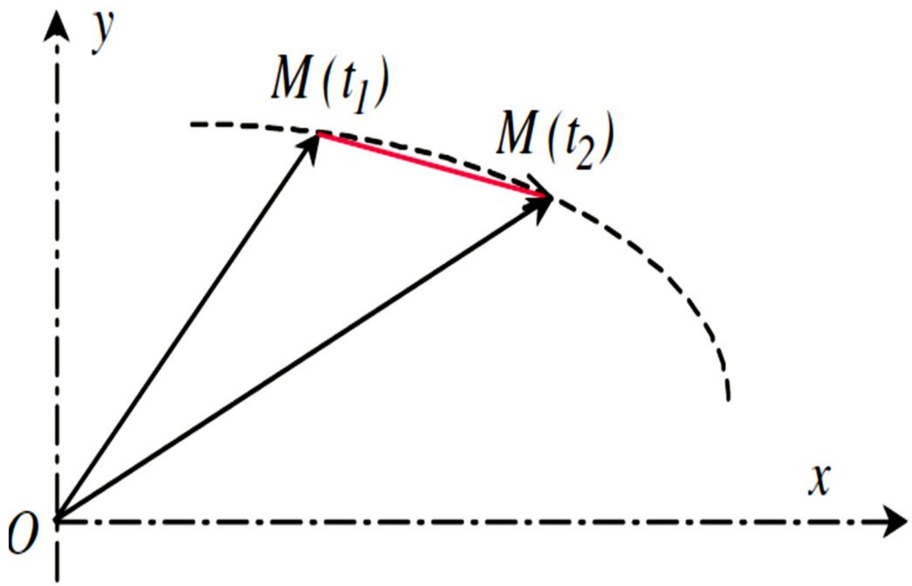
Coordonnées sphériques (r, θ, φ) (7)

$\overrightarrow{OM}$	$d\overrightarrow{OM}$	ds	$\vec{u}$	dV
r	dr	$r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$	$\vec{u}_r$	$r^2 \sin\theta dr d\theta\, d\varphi$
θ	$r d\theta$	$r \sin\theta d\varphi dr$	$\vec{u}_\theta$	
φ	$r \sin\theta\, d\varphi$	$r dr d\theta$	$\vec{u}_\varphi$	

Vecteur vitesse d’un point

Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un point est obtenue en calculant le rapport de la distance parcourue par la durée du parcours : $V_m = d/t$



Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

Le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$$

Ce vecteur a pour direction et sens ceux du mouvement (de M_1 vers M_2). La norme renseigne sur la distance parcourue en moyenne par unité de temps. La vitesse s'exprime en mètre par seconde $(m.s^{-1})$

Vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée en un point M de la trajectoire est :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

C'est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

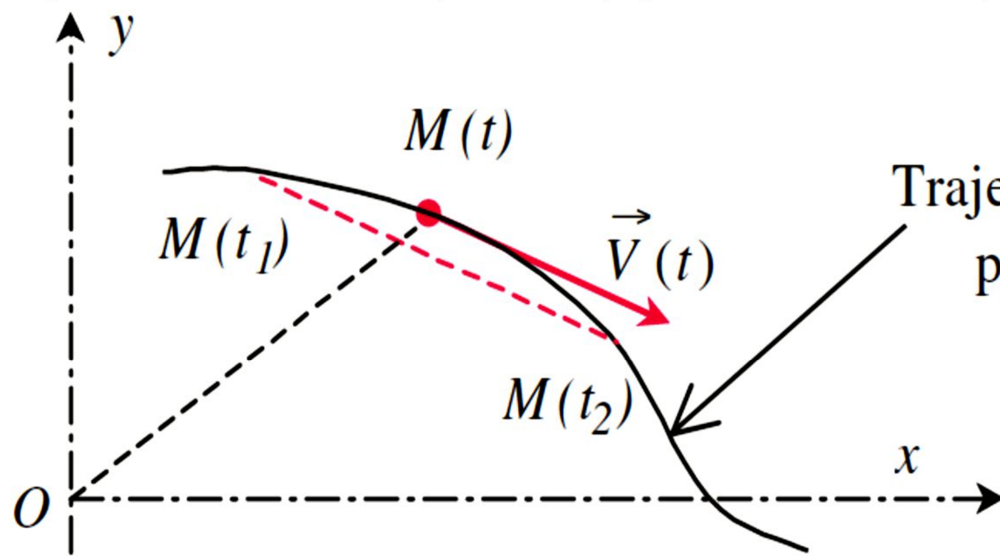


Figure 1.11 Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$ considéré.

Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes(x, y, z)

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Il vient donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z}}$$

$$\boxed{\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_x = \dot{x} \\ V_y = \dot{y} \\ V_z = \dot{z} \end{array}\right.}$$

Vecteur vitesse en coordonnées polaires$(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta})$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{u}_\rho) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Puisque $d\theta/dt = \dot{\theta}$ et que $d\vec{u}_\rho/d\theta = \vec{u}_\theta$ il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{V}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_\rho = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho\dot{\theta} \end{array}\right.}} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}}}$$

✓ V_ρ est appelée composante radiale du vecteur vitesse

✓ V_θ est appelée composante orthoradiale du vecteur vitesse

Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (1)

La base associée aux coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est une base mobile. Dans cette base, seule la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est une base mobile et $\vec{u}_z$ est un vecteur fixe :

$$\boldsymbol{base}\ (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z) = \begin{cases} (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta) = \boldsymbol{base\ mobile} \\ \vec{u}_z = \boldsymbol{vecteur\ fixe} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

$$= \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{z}\vec{u}_z$$

Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) (2)

Il vient :

$$\boxed{\boxed{\vec{V}(t) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}}$$

$$\boxed{\boxed{\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_\rho = \dot{\rho} \\ V_\theta = \rho\dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{array}\right.}}$$

$$\boxed{\boxed{\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}}$$

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques (r, θ, φ) (1)

On montre que la base associée aux coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ a pour différentielles :

$$\begin{cases} d\vec{u}_r = d\theta\, \vec{u}_\theta + \sin\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi \\ d\vec{u}_\theta = -d\theta\, \vec{u}_r + \cos\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi \\ d\vec{u}_\varphi = -\sin\theta\, d\varphi\, \vec{u}_r - \cos\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Le vecteur position étant $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, on a :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$= \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\theta\, \vec{u}_\theta + \sin\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi}{dt}$$

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques (r, θ, φ) (2)

$$\Longrightarrow \vec{V}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi$$

Puisque $d\theta/dt = \dot{\theta}$ et que $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$, il vient finalement

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{V}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{V}\left|\begin{array}{c} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \\ V_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \end{array}\right.}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}}}$$

Vitesse angulaire (1)

Lorsqu'un point M se déplace dans l'espace, les vecteurs de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ sont des vecteurs tournants dans le plan (O, x, y) avec la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. De façon générale pour caractériser la rotation d'un vecteur tournant dans un plan il faut pouvoir définir ce plan et la valeur de la vitesse angulaire. **Pour définir un plan, il suffit de se donner un vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan. Le sens de ce vecteur définira le sens positif des rotations dans le plan correspondant avec la règle habituelle de tire- bouchon.**

Vitesse angulaire (2)

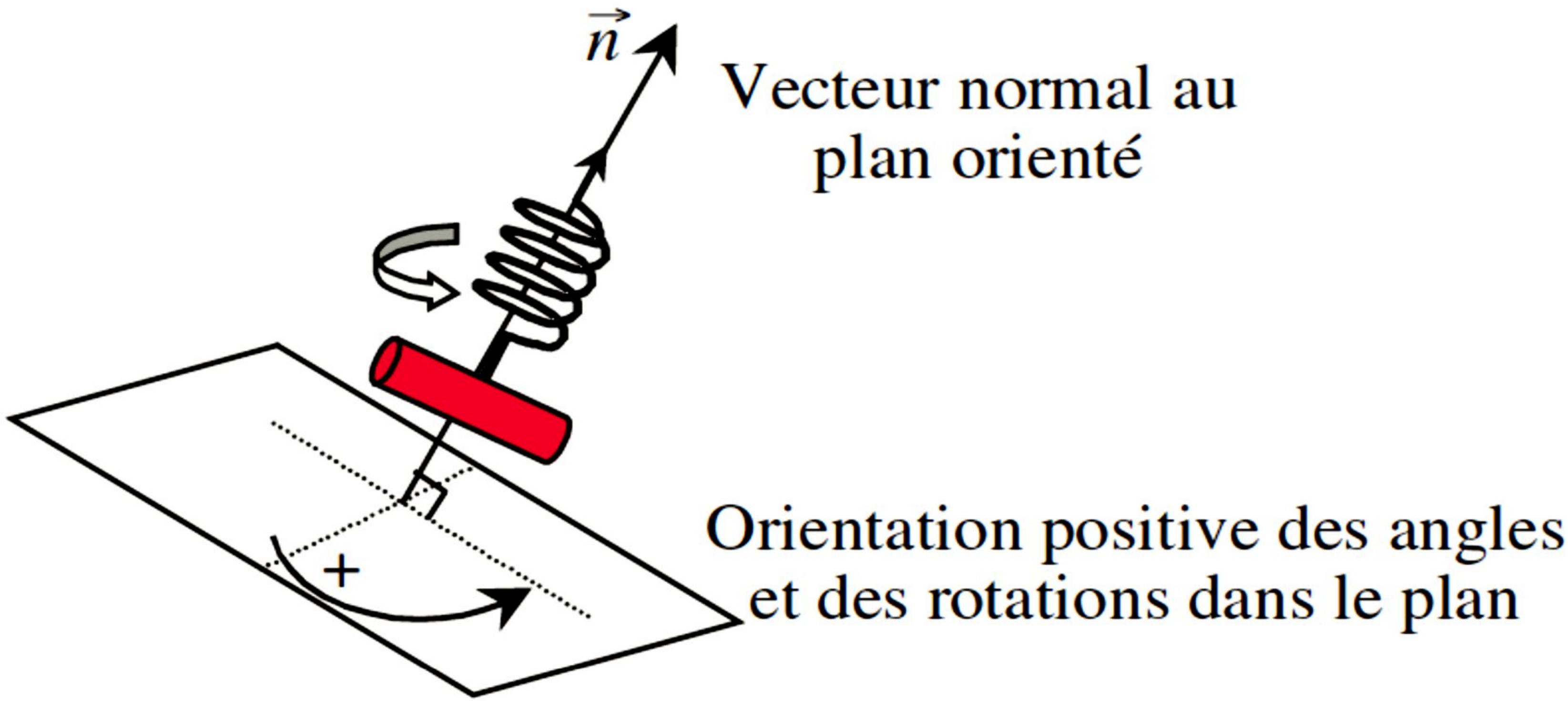


Figure 1.14 Orientation des rotations dans un plan et vecteur normal à ce plan : règle du « tire-bouchon ». Le sens positif de rotation dans le plan est celui qu'il faut donner au tire-bouchon (ou à une vis) pour qu'il se dirige suivant le vecteur unitaire normal au plan.

Vitesse angulaire (3)

Le vecteur vitesse angulaire caractérisant la rotation des vecteurs de la base polaire est un vecteur suivant l'axe Oz et de module correspondant à la valeur algébrique de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$

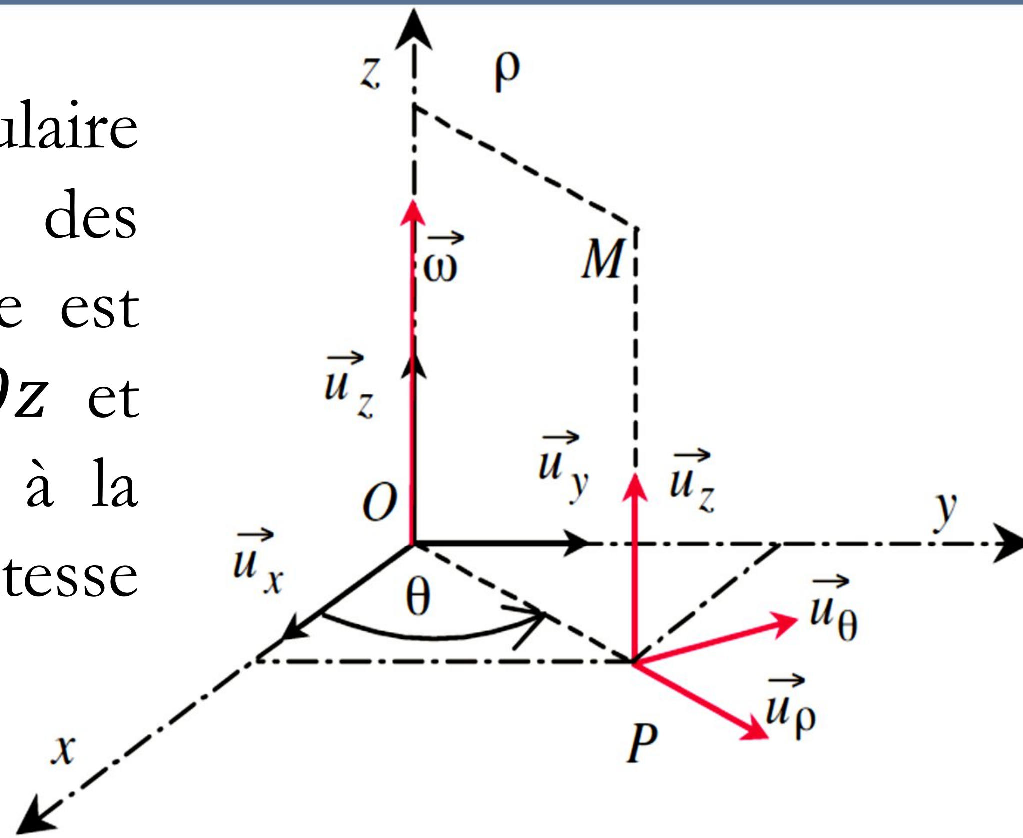


Figure 1.15 Rotation des vecteurs de la base polaire dans le plan (O, x, y) lorsque le point mobile M se déplace. Le vecteur vitesse angulaire est un vecteur suivant l'axe Oz orienté comme $\vec{u}_z$ et de module égal à $\dot{\theta}$: $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{u}_z$.

Vecteur accélération d'un point

Définition

Tout comme le vecteur vitesse qui rend compte de la variation du vecteur position par rapport au temps, **le vecteur accélération va rendre compte des variations du vecteur vitesse par rapport au temps**. Le vecteur accélération correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse c'est-à-dire aussi à la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Expression du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes(x, y, z)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z\right)$$

$$= \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z$$

Il vient donc :

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z}$$

$$\boxed{\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{array}\right.}$$

Expression du vecteur accélération en coordonnées polaires (ρ, θ) (1)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right)$$

$$= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\,\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$$

il vient :

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\,\right)\vec{u}_\theta}}$$

Expression du vecteur accélération en coordonnées polaires (ρ, θ) (2)

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\theta \vec{u}_\theta \Longrightarrow \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \end{array} \right.}}$$

✓ a_ρ est appelée composante radiale du vecteur accélération

✓ a_θ est appelée composante orthoradiale du vecteur accélération

$$\boxed{\boxed{\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)^2}}}$$

Expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

Il suffit de rajouter $\ddot{z}$ suivant $\vec{u}_z$ à l'accélération obtenue en coordonnées polaires. Soit:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^{\,2})\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$$

$$\boxed{\vec{a}\left|\begin{array}{c} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^{\,2} \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ a_\rho = \ddot{z} \end{array}\right.}$$

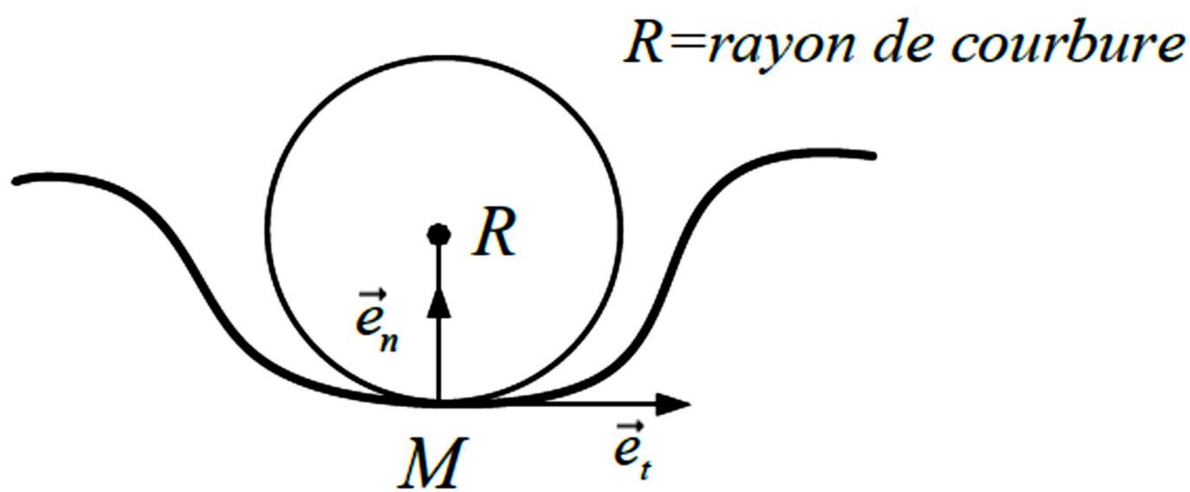
$$\boxed{\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^{\,2})^2 + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^{\,2}}}$$

Composantes de Frenet en coordonnées intrinsèques

Vecteur accélération (1)

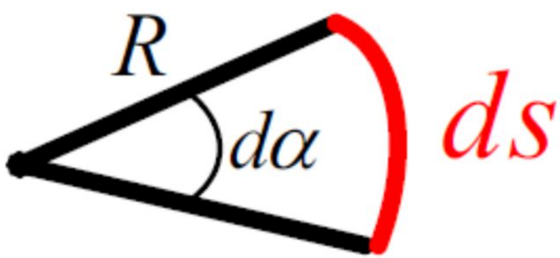
On peut aussi exprimer la vitesse et l'accélération à partir d'une base mobile $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_n)$ définie à partir des vecteurs :

- $\vec{e}_t$: vecteur tangent à la trajectoire au point M dans le sens du mouvement.
- $\vec{e}_n$: vecteur normal à la trajectoire du mouvement dont la droite d'action passe par le centre de courbure de la trajectoire en ce point.



Vecteur accélération (2)

On définit une abscisse curviligne s sur le cercle qui vérifie $ds = Rd\alpha$



$$ds = R\,d\alpha \Longrightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

La vitesse s'exprime par :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t \Longrightarrow \vec{v} = v\,\vec{e}_t$$

L'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

On sait que :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta \Longrightarrow \frac{d\vec{e}_t}{d\alpha} = \vec{e}_n \Longrightarrow \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \vec{e}_n\frac{d\alpha}{dt} = \vec{e}_n\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \vec{e}_n\frac{1}{R}v = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$

Vecteur accélération (3)

D'où l'expression de **l'accélération dans la base de Frenet** :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \Longrightarrow \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right.}$$

- ✓ a_t est appelée **accélération tangentielle**
- ✓ a_n est appelée **accélération normale centripète**. La composante a_n est toujours positive et donc **le vecteur accélération est toujours tournée vers la concavité.**

Vecteur accélération (4)

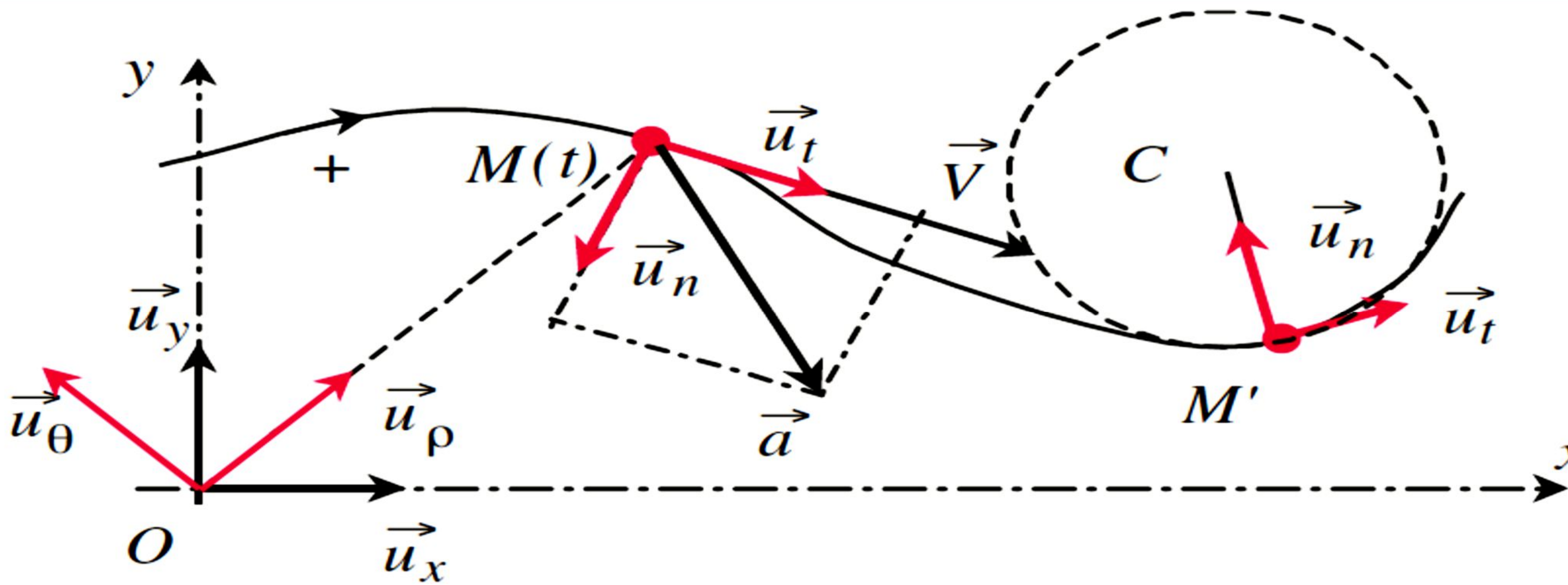


Figure 1.18 Le vecteur accélération et la base de Frenet ($\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$). Le rayon de courbure en M′ correspond au rayon CM′ du cercle tangent à la trajectoire au point M′ considéré. Les bases polaire et cartésienne sont représentées au point O pour mettre en évidence les différences avec la base de Frenet.

Exemple de mouvements « usuels » importants

A- Définitions

Equations horaires du mouvement

Ce sont les fonctions $\{x(t), y(t), z(t)\}$ ou $\{r(t); \theta(t); z(t)\}$

Exemples :

✓ En coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} a_0 t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

✓ En coordonnées cylindrique

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Equation de la trajectoire

C'est la relation liant x, y et z ou liant r, θ, et z indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires.

Exemple:

$$x(t) = v_0 t \Longrightarrow t = \frac{x}{v_0} \Longrightarrow \; y = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{{v_0}^2}$$

(Mouvement parabolique dans le plan $z = 0$)

B- Mouvements rectilignes

Mouvements rectilignes (1)

Mouvement rectiligne uniforme :

Vecteur vitesse constant $\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}_o = V_o \vec{u}_x$

Rectiligne uniformément varié :

$\vec{a}(t) = \text{cste} = \vec{a}_o = a_o \vec{u}_x \Rightarrow \ddot{x} = a_o$ et trajectoire rectiligne.

Rectiligne quelconque :
L'accélération est une fonction quelconque du temps. En intégrant une première fois cette fonction, on obtient la vitesse à une constante près. En l'intégrant une deuxième fois on obtient l'équation horaire.

$$a = \ddot{x} = f(t) \Rightarrow v(t) = \dot{x} = \int f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$

Mouvements rectilignes (2)

Rectiligne sinusoïdal :

L'équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps du type :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

C'est le mouvement par exemple d'une masse accrochée à un ressort.

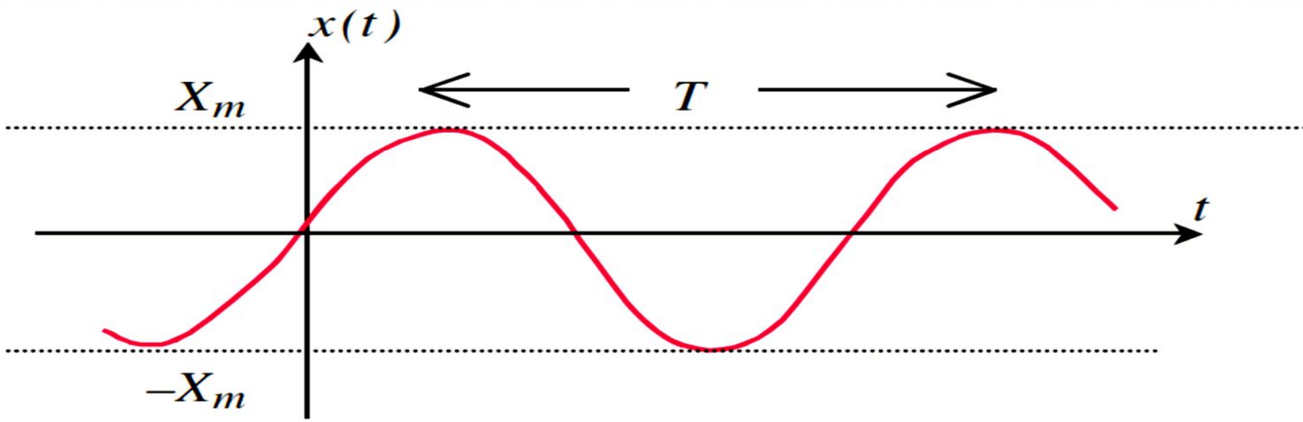


Figure 1.19 Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

C- Mouvements circulaires

Définitions

La trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre *O* et son rayon *R*. L'origine du repère est le centre du cercle. L'axe Oz est perpendiculaire au plan contenant la trajectoire. Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement.

Equations horaires du mouvement

$$r = R = constante$$

$$\theta = \theta(t)$$

- ✓ mouvement circulaire uniforme si

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \quad avec\ \dot{\theta} = \omega_0 = cte$$

- ✓ mouvement uniformément varié (accéléré ou décéléré) si

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}_0 = cte$$

- ✓ sinusoïdal si $\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t + \varphi)$

Mouvement circulaire quelconque (1)

La figure ci-contre représente les vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire quelconque. **Dans le cas où l'accélération tangentielle est dirigée comme le vecteur vitesse le mouvement est accéléré ($v.a_t > 0$). Dans le cas contraire, le mouvement serait freiné.**

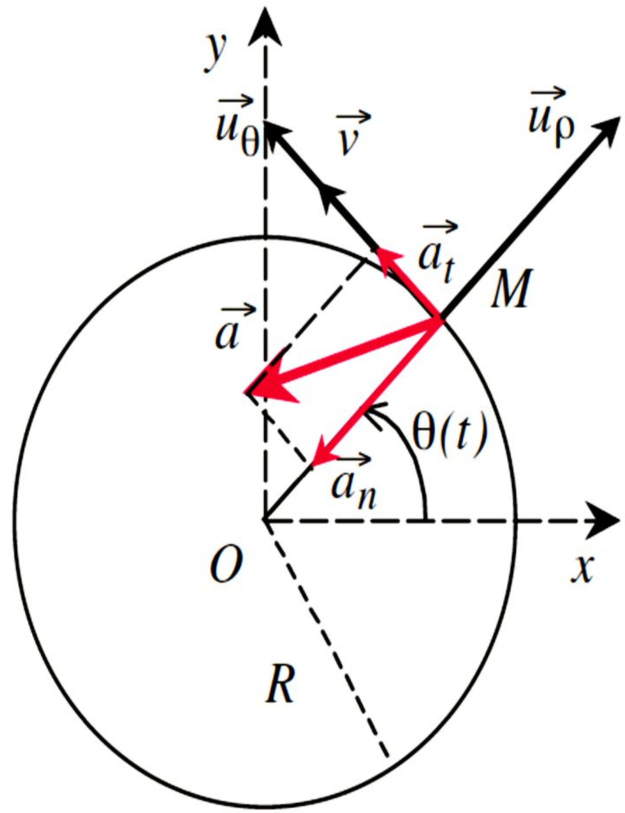


Figure 1.20 Vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire quelconque.

Mouvement circulaire quelconque (2)

➢ **Déterminons les vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire :**

✓ le vecteur vitesse

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_\rho = R\vec{u}_\rho$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\vec{u}_\rho\right) = R\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\boxed{\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega(t)\vec{u}_\theta}}$$

✓ le vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\vec{u}_\theta) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta + R\omega\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= R\dot{\omega}\vec{u}_\theta - R\omega^2\vec{u}_\rho$$

Mouvement circulaire quelconque (3)

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta}}$$

➤ **Déterminons les vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet**

Pour passer de la base polaire à la base de Frenet, il suffit simplement de remplacer :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = -\vec{e}_n \\ \vec{u}_\theta = \vec{e}_t \end{cases}$$

✓ le vecteur vitesse

$$\boxed{\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\,\vec{e}_t = v\,\vec{e}_t \Rightarrow v = R\omega}}$$

Mouvement circulaire quelconque (4)

✓ le vecteur accélération

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = +R\omega^2\vec{e}_n + R\dot{\omega}\,\vec{e}_t}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \Longrightarrow \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = R\dot{\omega} \\ a_n = R\omega^2 \end{array}\right.}$$

On le voit bien : **$\vec{a}_n$ est toujours dirigé vers le centre du cercle : composante normale centripète. C'est elle qui fait tourner c'est-à-dire qui rend compte de la variation de la direction du vecteur vitesse.**

Mouvement circulaire uniforme (1)

Dans un mouvement circulaire uniforme **la vitesse angulaire de rotation est constante**. L'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = \omega_0 = cte$$

L'équation horaire est obtenue par intégration

$$\theta(t=0) = \theta_0 \Longrightarrow \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\vec{u}_\rho\right) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$= R\omega_0\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v}(t) = R\omega_0\vec{u}_\theta}}$$

Mouvement circulaire uniforme (2)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega_0\vec{u}_\theta) = R\omega_0\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= -R\omega_0{}^2\vec{u}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega_0{}^2\vec{u}_\rho}$$

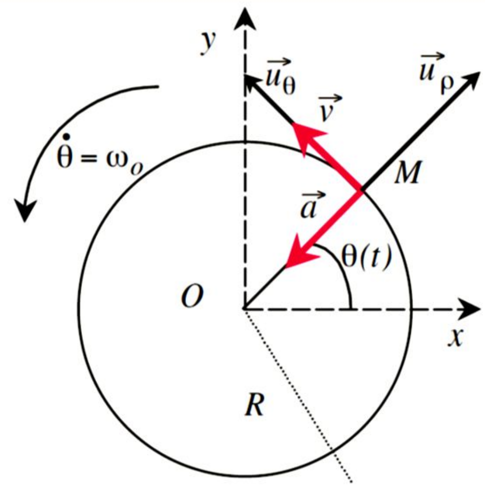


Figure 1.21 Vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

Dans la base de Frenet on a :

$$\vec{u}_\rho = -\vec{e}_n \Longrightarrow \vec{a}$$
$$= -R\omega_0{}^2\vec{u}_\rho = R\omega_0{}^2\vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = a_n\vec{e}_n = R\omega_0{}^2\vec{e}_n}$$

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. Uniforme ne veut donc pas dire accélération nulle.

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU (1)

Il est possible d'exprimer les vecteurs vitesse et accélération en introduisant le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z$. En remarquant que $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$, on a :

$$\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right)$$

$$= \omega\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

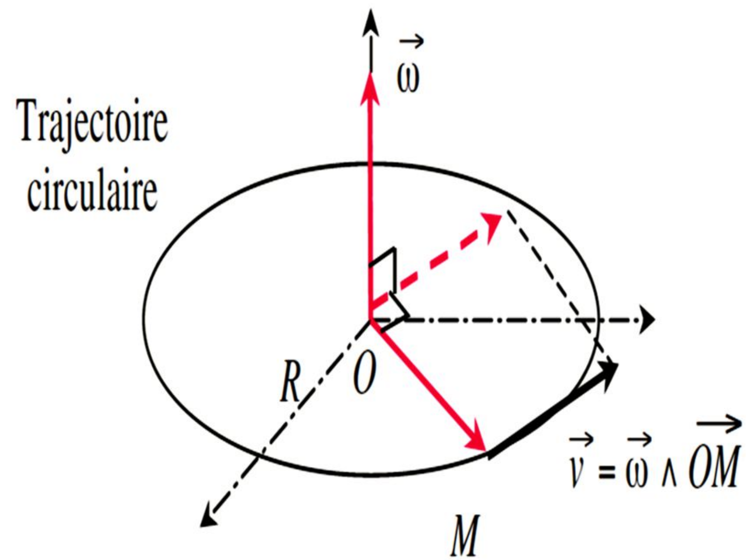


Figure 1.22 Lien entre vecteur vitesse $\vec{v}$ et vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU (2)

Cette expression permet d'exprimer la dérivée du vecteur position indépendamment de la base choisie. **Cette relation est valable pour tout vecteur de norme constante et en rotation**. En particulier on peut écrire :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) = \omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho = -\omega(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta)$$

$$= \omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta$$

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU (3)

On admet la propriété suivante :

Pour un vecteur $\vec{X}$ de norme $\|\vec{X}\| = X = cte$ et tournant avec la vitesse angulaire ω (dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{\omega}$) :

$$\boxed{\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{X}}$$

Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire.

La même règle peut être utilisée pour déterminer le vecteur accélération :

- **Composante radiale $\vec{a}_n$**

$$\vec{a}_n = -R\omega^2\vec{u}_\rho = R\omega^2(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = R\omega^2\left[\vec{u}_z \wedge \left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right)\right]$$
$$= \omega\vec{u}_z \wedge \left(\omega\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_\rho\right)$$

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU (4)

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

- **Composante orthoradiale $\vec{a}_t$**

$$\vec{a}_t = R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = R\frac{d\omega}{dt}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right) = \frac{d(\omega\vec{u}_z)}{dt} \wedge R\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge R\vec{u}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

- **Vecteur accélération $\vec{a}$**

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU (5)

On peut obtenir directement ce résultat par

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}}$$

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU (6)

Mouvement circulaire rayon *R*	**Coordonnées polaires Base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$**	**Vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$**
Position $\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho$	
Vitesse $\vec{v}$	$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta = v\vec{u}_\theta$	$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$
Accélération Normale $\vec{a}_n$	$\vec{a}_n = -R\omega^2\vec{u}_\rho$	$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$
Accélération tangentielle $\vec{a}_t$	$\vec{a}_t = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$	$\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$	$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$

Introduction au mouvement des solides

A- Translation d’un solide

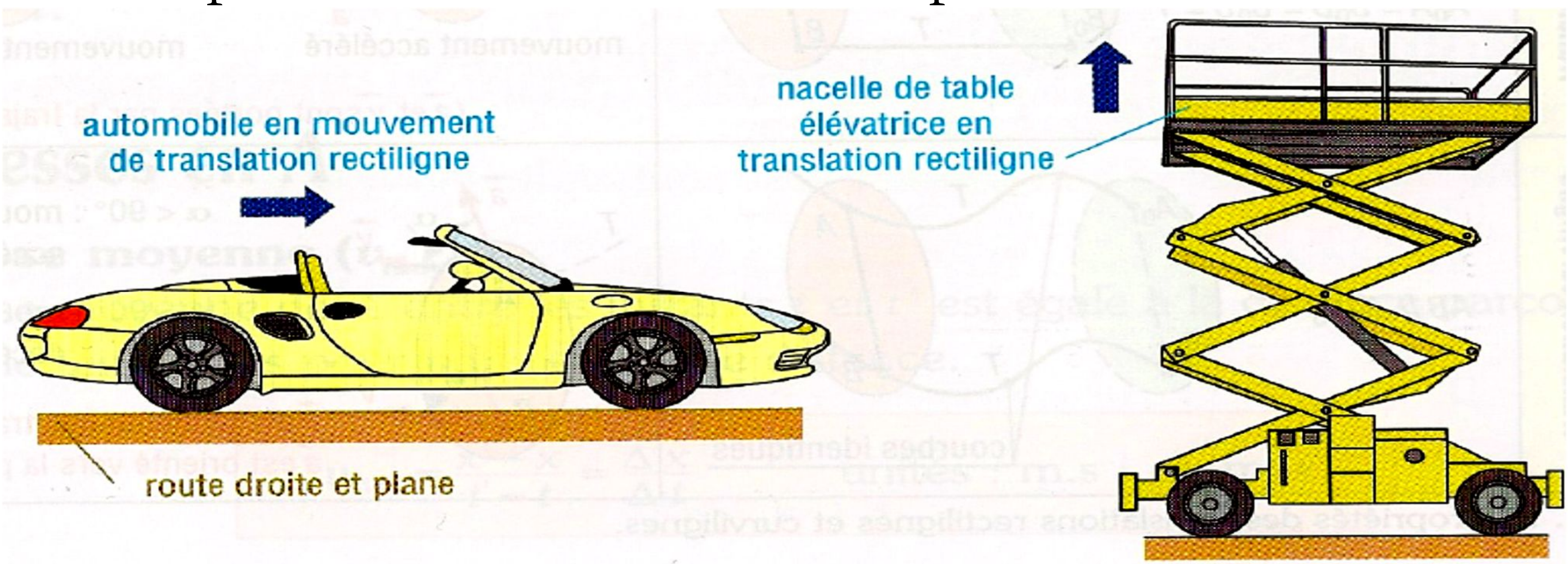
Généralités (1)

D'une manière générale, **lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci de déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps**. Aucune ligne ne subit la moindre rotation. Les lignes verticales restent verticales, les horizontales restent horizontales, etc., pendant toute la durée du mouvement quelles que soient les vitesses et les accélérations. Par exemple, les lignes horizontales de la carrosserie d'une automobile en mouvement sur une route horizontale droite vérifient cette propriété. Le mouvement est appelé translation rectiligne et chaque point du véhicule suit une ligne trajectoire droite dans le sens du mouvement. Dans les mouvements de translations curvilignes, si l'orientation de chaque ligne du solide est encore fixe (pas de rotation), les trajectoires des points ne sont plus

Généralités (2)

des droites parallèles.

Remarque: en cinématique plane, il suffira de montrer qu'une seule droite du solide en mouvement vérifie la propriété précédente de parallélisme pour affirmer qu'il y a translation. Dans l'espace deux droites non parallèles seront nécessaires pour la démonstration.



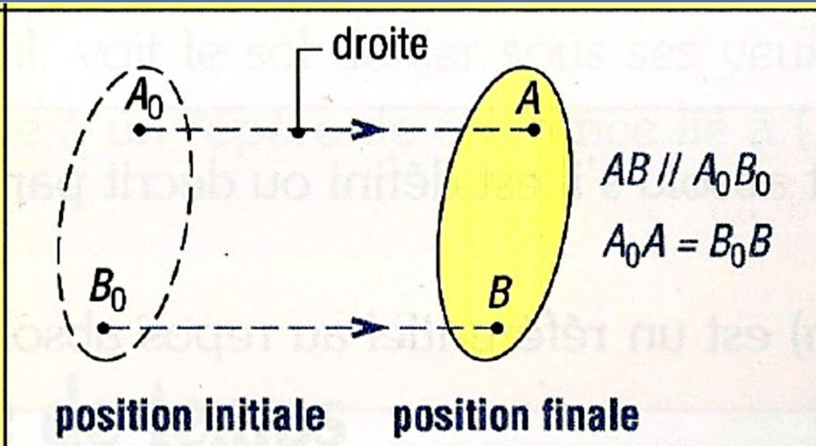
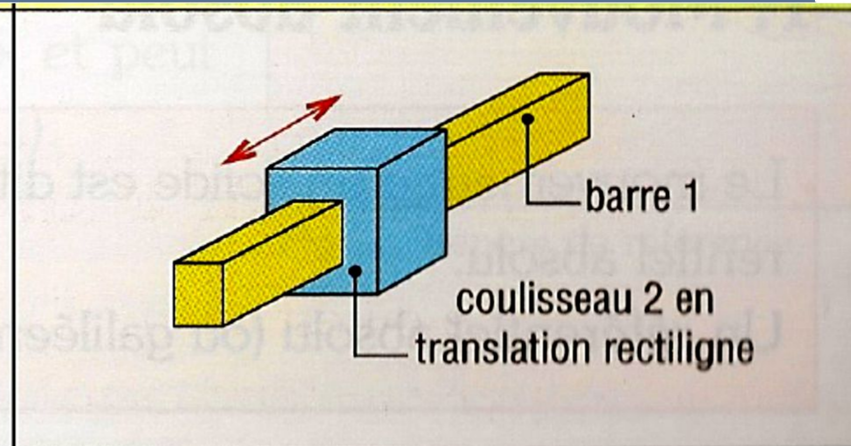
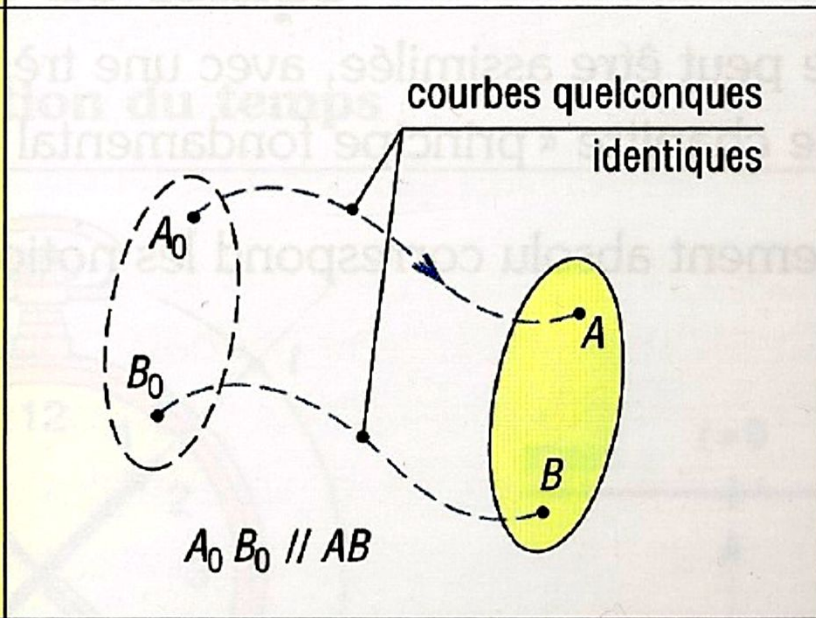
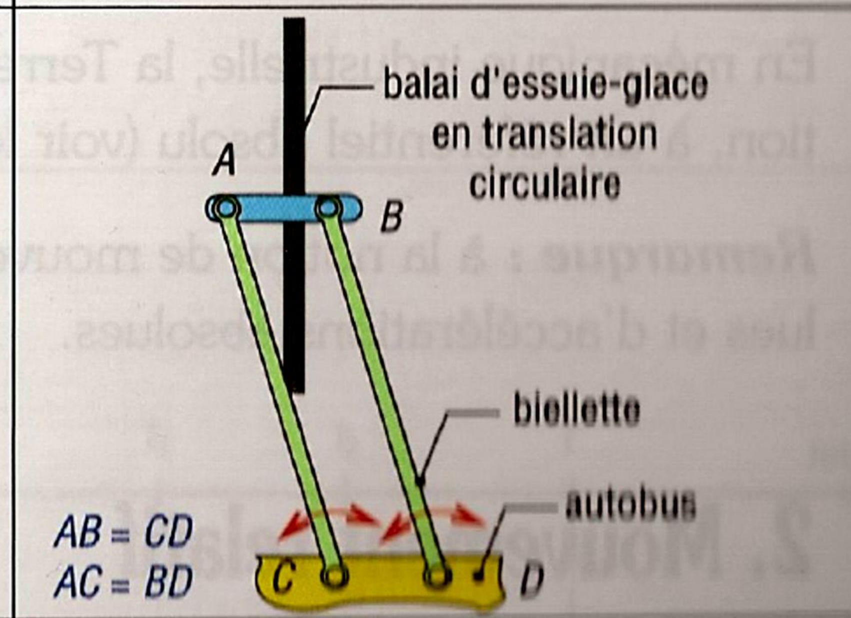
2 types de translation (1)

Un solide se déplace en translation si n'importe quelle ligne (AB) de celui-ci reste constamment parallèle à sa position initiale au cours du mouvement. A tout instant, il n'y a aucune rotation de AB.

Remarque: dans l'espace, deux lignes non parallèles seront nécessaires pour définir une translation.

- **Translation rectiligne**: tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles
- **Translation curviligne**: les points du solide se déplacent suivant des courbes géométriques ou superposables.

2 types de translation (2)

Translation rectiligne		
Translation curviligne		

Propriétés (1)

- **Tous les points** du solide en translation ont des **trajectoires identiques** (courbes géométriques superposables): $T = T_A = T_B = \cdots$
- **Tous les points** du solide ont **même vitesse** $\vec{v}$: $\vec{v} = \vec{V}_A = \vec{V}_B = \cdots$
- Tous les points du solide ont **même accélération** $\vec{a}$: $\vec{a} = \vec{a}_A = \vec{a}_B = \cdots$
- **Le mouvement de translation d'un solide est. complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points**

Propriétés (2)

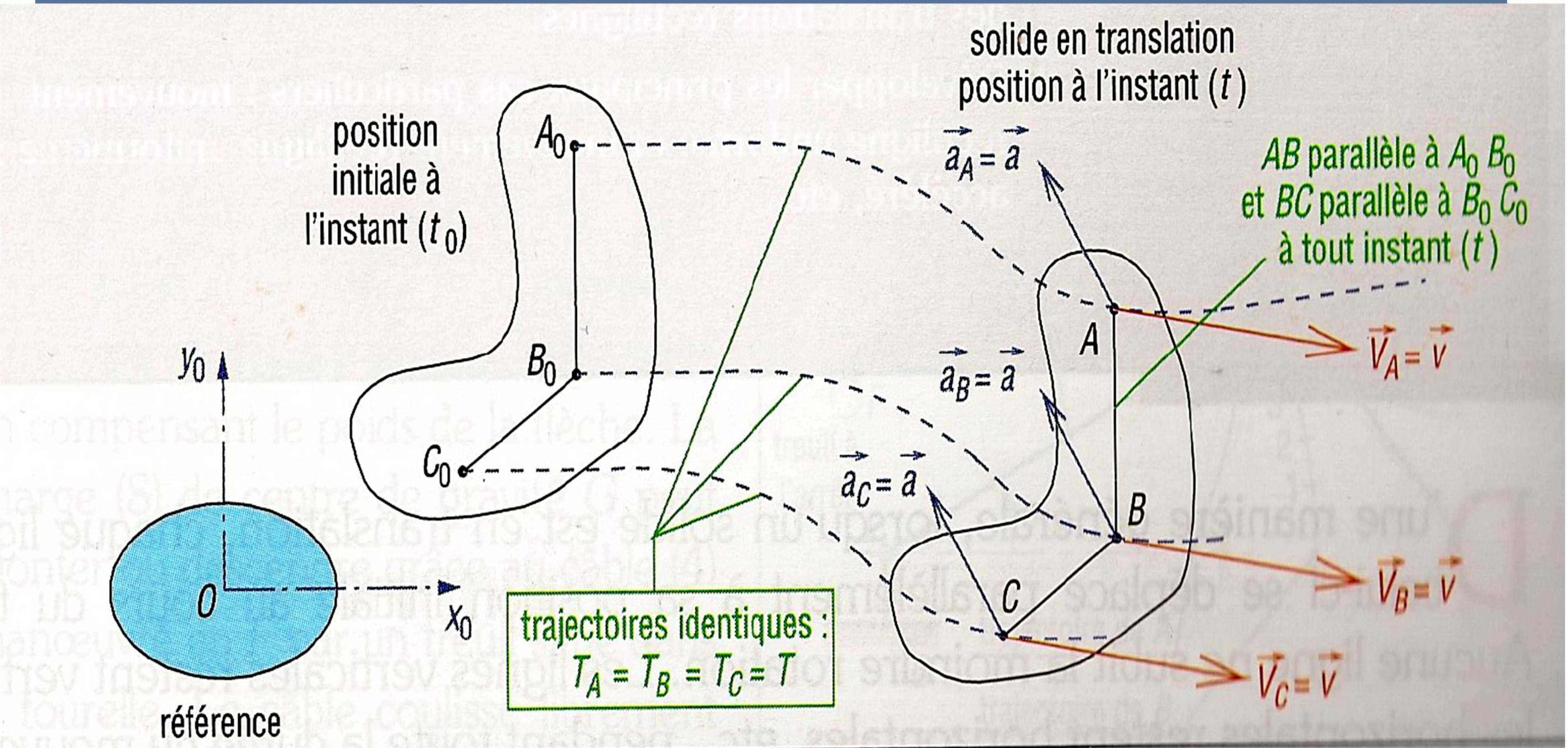


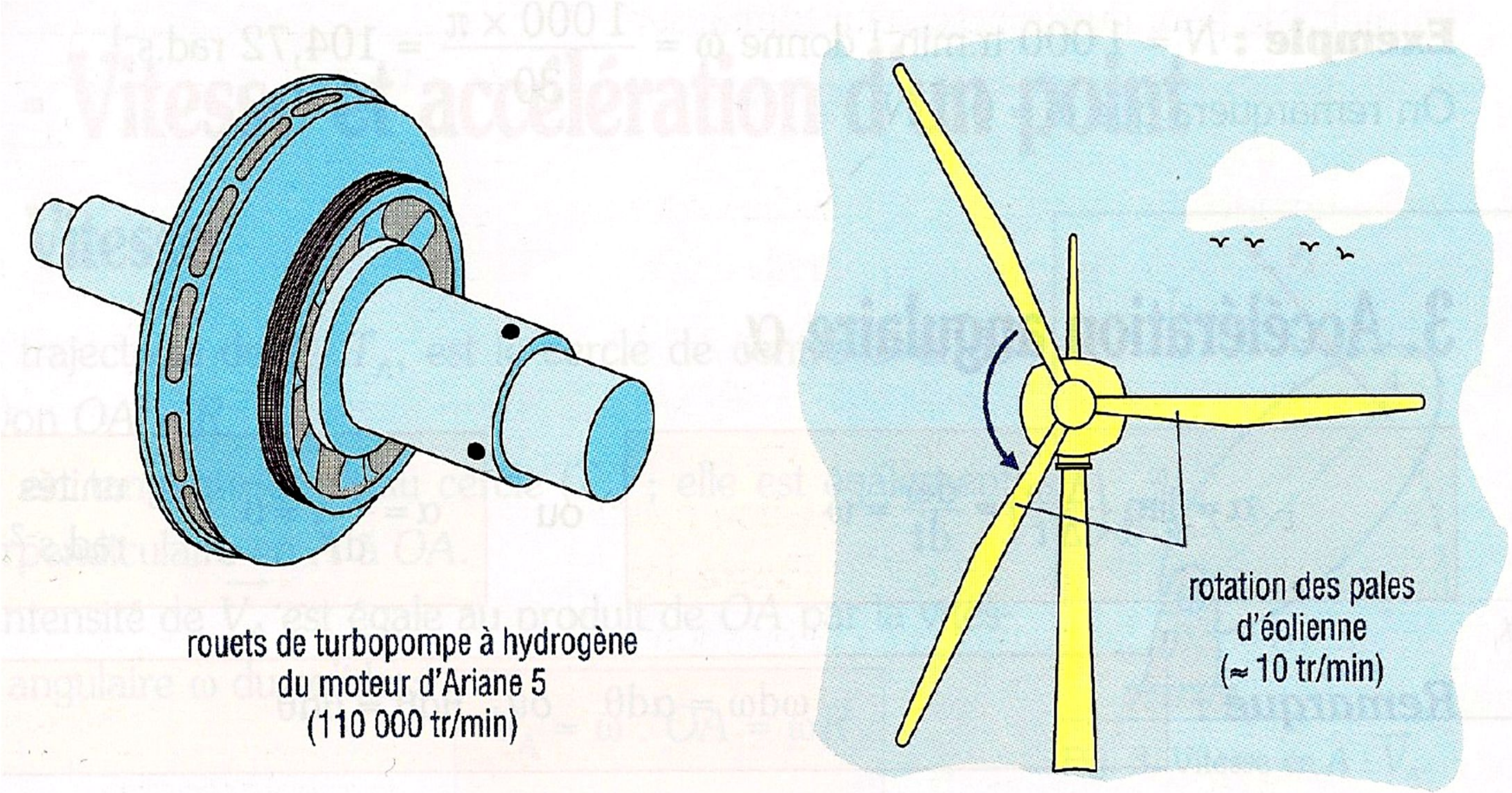
Fig. 1. Propriétés cinématiques (trajectoires, vitesses, accélérations...) des solides en translation.

B- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Généralités (1)

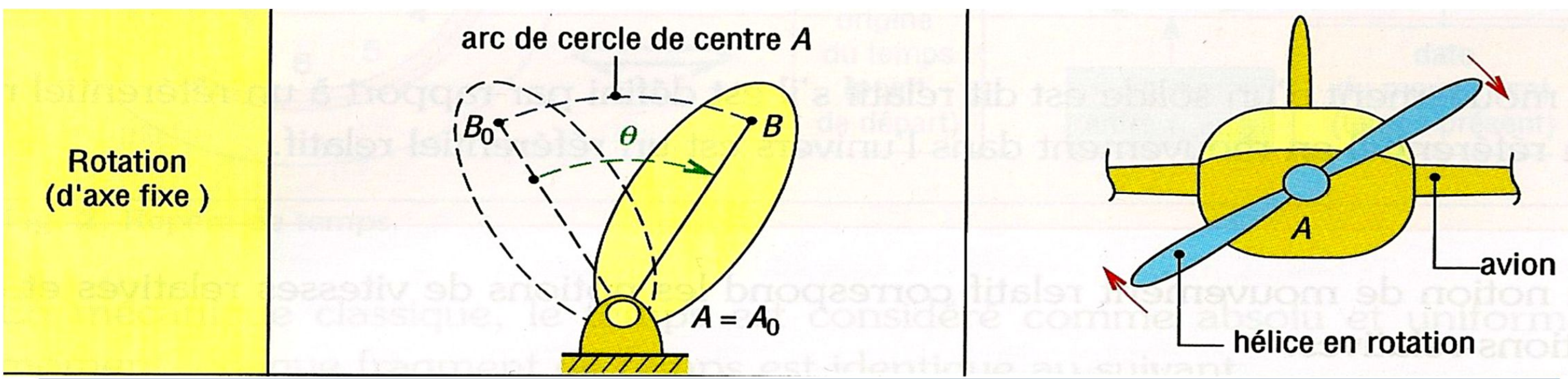
Nous nous limiterons aux **rotations d'axe fixe**. Celles-ci sont de très loin les plus répandues dans le monde des sciences et technologies industrielles. Les exemples de solides en mouvement de rotation d'axe fixe sont très nombreux qu'il s'agisse d'arbres de moteurs de toute nature (électrique, thermique…), d'arbres de turbines, de composants de machines (engrenages, courroies, poulies…), etc . La connaissance des caractéristiques (angles, vitesses, accélérations) liées à ces mouvements sont nécessaires aux techniciens et ingénieurs pour comprendre, maitriser, diagnostiques ou concevoir les systèmes qui les utilisent. Le domaine des très grandes vitesses de rotation (usinage…) en plein développement en est une des illustrations.

Généralités (2)

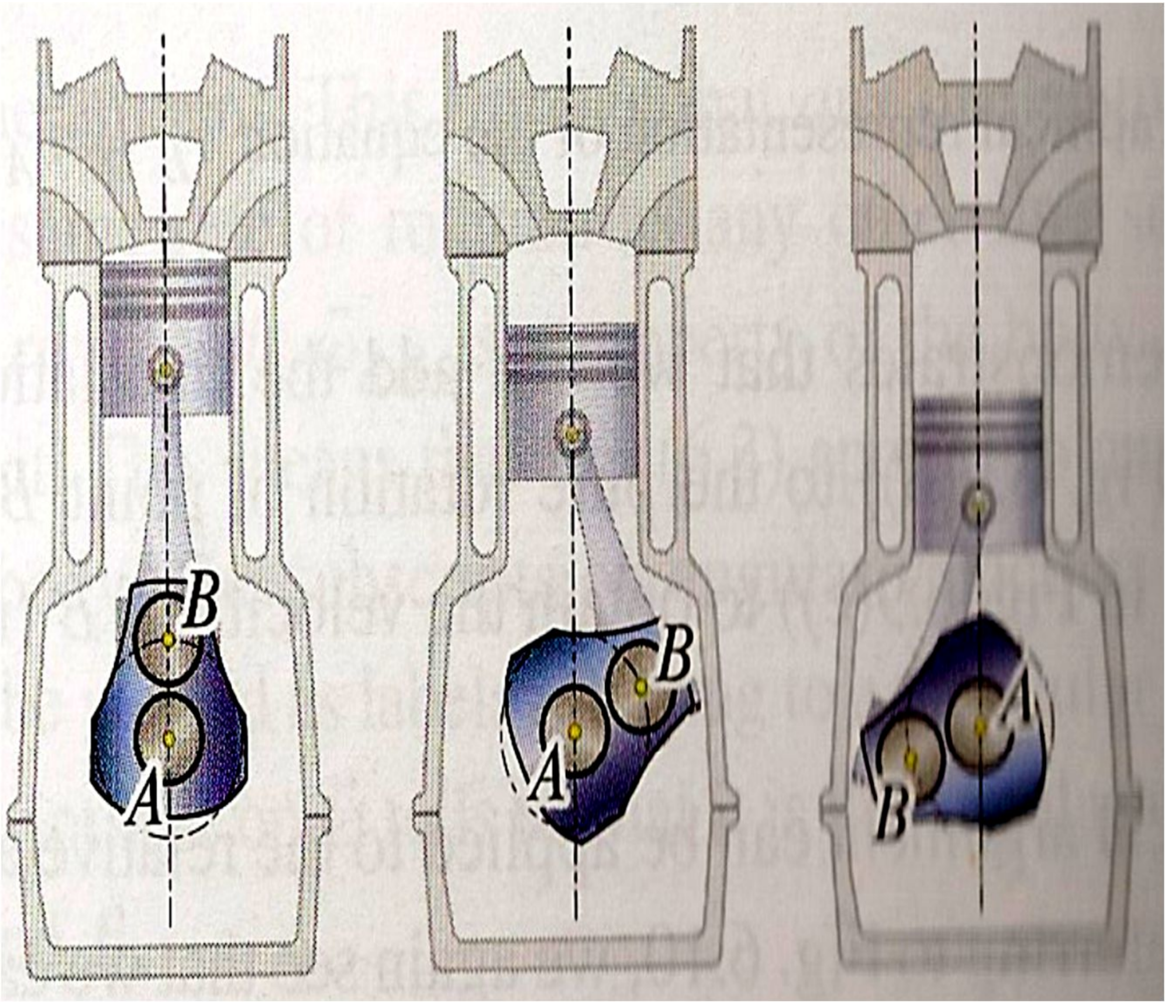


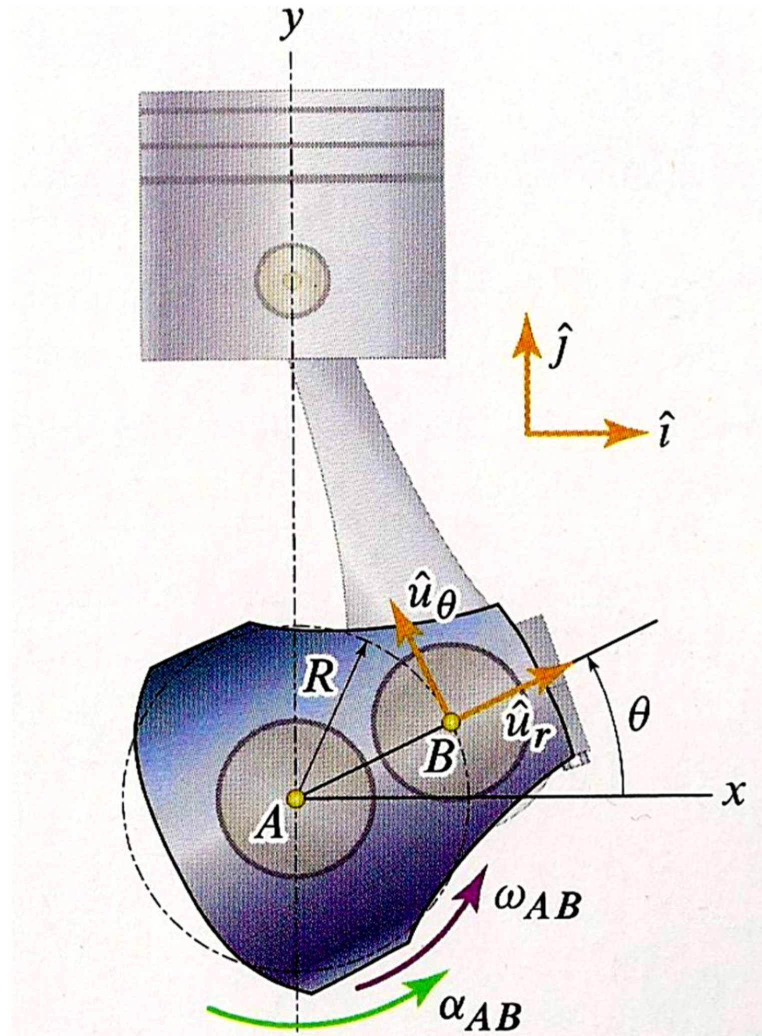
Propriétés

- Le solide tourne ou est animé d'un mouvement angulaire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement.
- Les points du solide décrivent des cercles ou des circonférences centrés sur l'axe
- Toutes les lignes ou droites du solide tournent du même angle θ à chaque instant considéré.



Vitesse d'un point du solide (1)





Vitesse d'un point du solide (2)

On considère le vilebrequin d'un moteur à explosion (type automobile). Ce dernier effectue un mouvement de rotation autour de l'axe fixe qui passe par A et qui traverse la page à vitesse angulaire ω (qui peu varier). Un point B quelconque du vilebrequin, distant de $r = AB$ de A, effectue un mouvement de rotation plan. Il est donc facile d'exprimer la vitesse du point B en coordonnées polaires d'après notre étude du mouvement circulaire :

$$\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$$

Plus le point est loin de l'axe, plus la norme de sa vitesse est importante !